Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

فصلنامه علمی- پژوهشی
فناوری اطلاعات و ارتباطات ایران

سال هفتم، شماره‌های ۲۵ و ۲۶، پاییز و زمستان ۱۳۹۴
صص: ۲۷- ۴۲

اصلاح توام نقص ابیراهی لنز دوربین و خطای خروج از مرکز تصویر با بهره‌گیری از مدل اصلاح شده زرنیک

کامبیز رهبر* کریم فائز** ابراهیم عطاران کاخکی***

*دکتری کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، تهران، ایران

** استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

*** دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد

تاریخ دریافت:۹۲/۴/۲۱ تاریخ پذیرش:۹۴/۱۱/۲۰

چکیده

کاهش کیفیت تصویر در یک سامانه اپتیکی تابع پارامترهای متفاوتی می‌تواند باشد. برخی از این پارامترها عبارتند از: ابیراهی لنز، خطای رقمی‌سازی و خطای مونتاژ سامانه. در حوزه خطای مونتاژ معمولا دو نوع خطای کلی در نظر گرفته می‌شود: ۱) عدم متعامد بودن پرده تصویر و محور اپتیکی که اغلب در قالب خطای prism از آن نام برده می‌شود.۲) خطای عدم عبور محور اپتیکی لنز از مرکز تصویر که تحت عنوان خطای خروج از مرکز تصویر (de-centering) از آن یاد می‌شود. از این میان مقاله حاضر قصد دارد تا به مطالعه ابیراهی لنز پرداخته و نقص ابیراهی آن را تواما با خطای خروج از مرکز اصلاح و جبران کند. برای این منظور ابیراهی‌های زایدل در قالب مومنت‌های اصلاح شده زرنیک مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم به صورت توابع مجزا روی فضای کارتزین بازنویسی می‌گردند. سپس مومنت‌های بازنویسی شده به گونه‌ای اصلاح می‌گردند که با در نظر گرفتن خطای خروج از مرکز، تابع ابیراهی فاز را نیز مدل کنند. نهایتا ضرایب مدل معرفی شده جهت تخمین در دو کلاس متقارن و نامتقارن دسته‌بندی می‌شوند. سپس این ضرایب با بهره‌گیری از آنالیز چندطیفی تخمین زده می‌شوند. جهت تخمین ضرایب جملات متقارن از آنالیز tri-coherence و برای ضرایب جملات نامتقارن از آنالیز bi-coherence استفاده شده است. نتایج آزمایشگاهی دقت و بازدهی راه‌کار پیشنهادی را تایید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: تابع ابیراهی فاز، خطای خروج از مرکز تصویر، چندجمله‌ای زرنیک، چندجمله‌ای چبیشف، آنالیز چندطیفی

۱. مقدمه

در شرایط ایده آل در اپتیک هندسی تمامی پرتوهایی که از یک نقطه از شیی هدف ساطع می‌شوند پرده تصویر را در یک نقطه قطع می‌کنند. در عمل این مهم اغلب حاصل نمی‌شود. انحراف از مسیر ایده آل برای پرتوهای ساطع شده و لمس نقطه دیگری روی پرده تصویر تحت عنوان ابیراهی[1] شناخته می‌شود. از طرفی دیگر اگر پرتوهای نور را به عنوان سیگنال و لنز را به عنوان یک سیستم بپذیریم، کاملا مشهود است که به واسطه تفاوت قطر در نواحی مختلف لنز و یا عدم یکنواختی چگالی مواد سازنده لنز، پرتوهای ورودی در این سیستم دچار تاخیر های متفاوتی می‌شوند. بنابراین ابیراهی برای پرتوهایی که با هم وارد لنز می‌شوند علاوه بر انحراف در نقاط مختلف لنز، تحت تاثیر تاخیر هم قرار می

1.Aberration

نویسنده عهده‌دار مکاتبات : کامبیز رهبر k.rahbar@srbiau.ac.ir

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

گیرد. بدینسان تابع ابیراهی موج تکرنگ را که تاخیرهای زمانی در آن منظور شده، تحت عنوان تابع ابیراهی فاز[۲] می‌شناسند. ابیراهی می‌تواند در دو کلاس کلی طبقه بندی شود: ابیراهی تکرنگ[۳] و ابیراهی رنگی[۴]. ابیراهی رنگی به تفرق طول موج های مختلف و تغییرات شاخص انکساری[۵] با آن بر می‌گردد؛ در حالی که ابرایی تکرنگ تنها برای یک طول موج نور رخ می‌دهد.

وجود ابیراهی در یک سامانه بینایی تاثیرات منفی زیادی به دنبال دارد. تاثیرات منفی متاثر از ابیراهی در یک سامانه اپتیکی در دو کلاس کلی قابل طرح هستند. کلاس اول مربوط به بررسی اثر ابیراهی در کاهش کیفیت تصویر حاصله می‌باشد. تصویر آلوده اغلب از ماتی محلی در نواحی مختلف خود رنج می‌برد. کلاس دوم مربوط به بزرگنمایی محلی در نواحی مختلف تصویر است که باعث کشیدگی و جمع شدگی محلی شده و موقعیت و ابعاد تصویر اشیاء را روی پرده تصویر تغییر می‌دهد. تاثیرات منفی، در کلاس اول تاثیرات نامطلوب ابیراهی معمولا پروسه های پردازش تصویر را درگیر می‌کند؛ در حالی که در کلاس دوم، تاثیرات نامطلوبی روی پروسه های بینایی ماشین از جمله کالیبراسیون سامانه بینایی می‌گذارد.

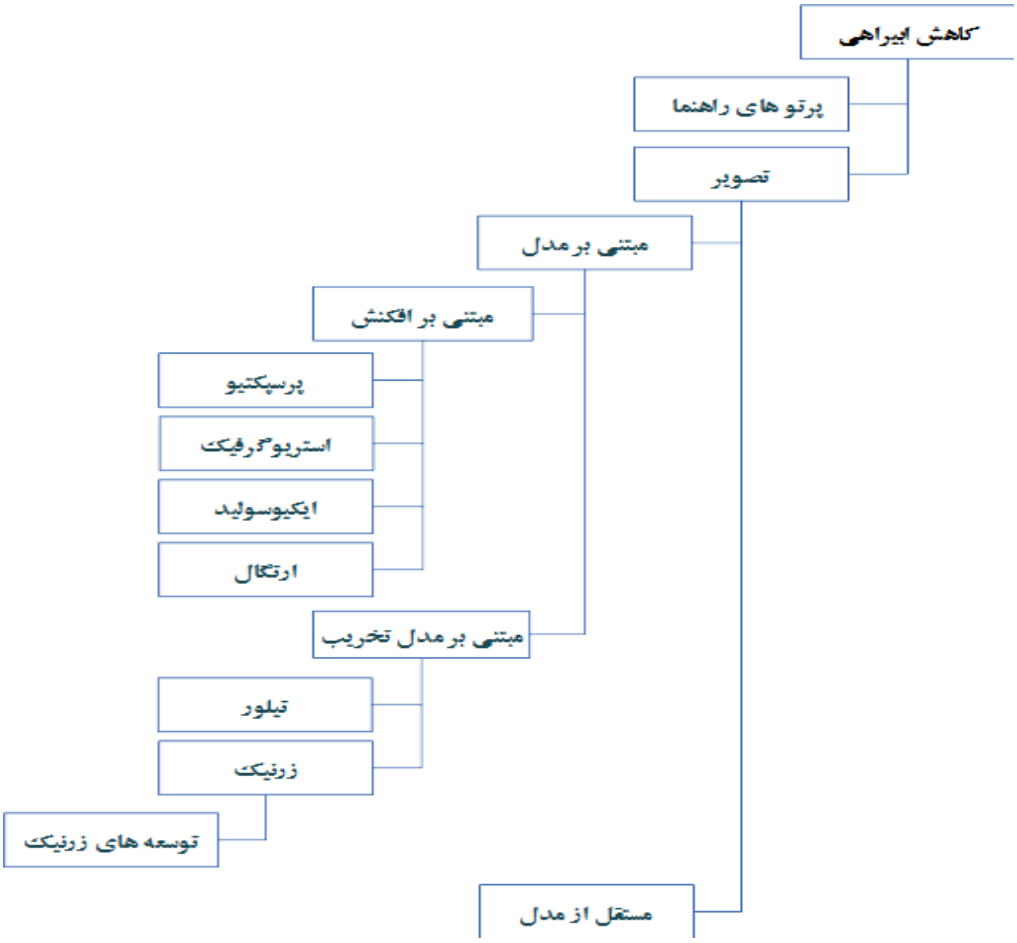
کاهش ابیراهی راهکارهای مختلفی دارد. شکل ۱ دسته بندی این راهکارها را ارایه می دهد. دسته‌ای اول از این راهکارها بر استفاده از پرتوهای راهنمای ویژه ای متکی هستند. پرتوهای مماسی[۶] و پیکانی[۷] نمونه ای از این پرتوها هستند. پروسه تشخیص و تعیین ابیراهی توسط این پرتوها اغلب از این مهم بهره می‌برد که پرتوهای تست از نظر هندسی تنها برخی از ابیراهی‌ها را ظاهر می‌کنند. با تابش این پرتوها به داخل سامانه اپتیکی و سنجش میزان انحراف در بازتابش آنها، می توان ابیراهی را در یک سامانه تشخیص و میزان آن را تعیین کرد. بنابراین این راهکار ها برای سنجش ابیراهی نیازمند وجود یک آینه فارغ از ابیراهی در پشت سامانه اپتیکی هستند. دسته‌ای دوم از راهکار ها پروسه تشخیص و تعیین ابیراهی را صرفا بر اساس تصویر نقش بسته بر پرده تصویر صورت می‌دهند. این راه‌کارها نیازی به پرتوهای ویژه هندسی ندارند. هر چند این روش‌ها اغلب نتایج ضعیف تری را ارایه می‌دهند، اما به واسطه عدم نیاز به پرتوهای ویژه هندسی، امکان سنجش و تعیین ابیراهی را در شرایطی که امکان بهره‌گیری از پرتوهای یاد شده وجود نداشته باشد، فراهم می‌آورند.

روش‌های دسته دوم، می‌توانند در ۲ کلاس اصلی طبقه بندی شوند: ۱) روش‌های مبتنی بر مدل[۸] و ۲) روش‌های فارغ از مدل[۹]. روش‌های فارغ از مدل تاثیر ابیراهی را مستقیما در مدل سامانه بینایی وارد می‌کنند. بنابراین مدل سامانه بینایی به گونه‌ای اصلاح می‌گردد که تاثیر ابیراهی روی تصویر در نتایج آن تاثیری نداشته باشد. در مقابل، روش‌های مبتنی بر مدل به ارائه مدلی مستقل برای تابع ابیراهی پرداخته و مدل سامانه بینایی را تحت تاثیر آن قرار نمی‌دهند. به عبارتی دیگر فرض می‌کنند که تصویر حاصله از سامانه بینایی پس از اصلاح توسط مدل ابیراهی، فاقد هر گونه ابیراهی است و می‌تواند به عنوان تصویر ایده آل برای مدل سامانه بینایی مورد استفاده قرار گیرد.در هر صورت هر یک از کلاس‌های بیان شده دارای مزایا و معایب خاص خود هستند. به عنوان نمونه هر چند روش‌های فارغ از مدل، با وارد کردن پارامتر های ابیراهی در مدل سامانه بینایی نیاز به کالیبراسیون مدل ابیراهی را کاهش می‌دهند، اما جملات اصلاح شده در مدل سامانه بینایی دیگر دارای تعبیر فیزیکی نخواهند بود. بعلاوه از آنجایی که مدل سامانه بینایی می‌تواند بصورت خطی تحقق یابد، وارد کردن پارامتر های ابیراهی، مدل سامانه بینایی را غیر خطی می‌کند که این مهم نیز از معایب این کلاس به شمار می آید. بنابراین پروسه کالیبراسیون باید به صورت غیر خطی جهت تخمین پارامتر های مدل اعمال شود. این مهم کاربرد هایی را که نیاز به کالیبراسیون بلادرنگ دارند به چالش می‌کشد.

2.Phase aberration function
3.Monochromatic aberration
4.Chromatic aberration
5.Refraction
6.Tangential rays
7.Sagittal rays

8.Model based method
9.Non-parametric methods

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026



شکل ۱. دسته بندی راهکار های کاهش ابیراهی

در مقابل، روش‌های مبتنی بر مدل با مدل‌سازی مستقل ابیراهی می‌توانند ابیراهی را به صورت موثرتری مدل کنند. مدل‌سازی مستقل ابیراهی این امکان را فراهم می‌سازد که مدل سامانه بینایی بتواند به صورت خطی تحقق یابد. ضمنا امکان کنترل بیشتر خطای منتشر شده در نتایج مدل ابیراهی نیز میسر می‌گردد. در مقابل، مدل‌های مستقل نیاز به پروسه کالیبراسیون خاص خود دارند. در مدل‌های مستقل جملات می‌توانند تعبیر فیزیکی داشته باشند.

پروسه مدل‌سازی برای روش‌های مبتنی بر مدل، خود نشات گرفته از دو دیدگاه متفاوت است. دیدگاه اول پروسه مدل‌سازی را بر پایه انواع مدلهای افکنش[10] انجام می‌دهد. در حالی که دیدگاه دوم مبتنی بر انواع مختلف اثرات تخریب ابیراهی بر تصویر می‌باشد. روش‌های مبتنی بر مدل برگرفته شده از دیدگاه اول، دیدگاه مبتنی بر انواع مدلهای افکنش، چهار مدل کلی را برای افکنش معرفی می‌کنند که عبارتند از: ۱) پرسپکتیو[11]، ۲) استریوگرفیک[12]، ۳) ایکیوسولید[13] و ۴) ارتوگنال[14]. در مدل‌های افکنش یاد شده تفاوت در نحوه مدل‌سازی رابطه هندسی بین ۳ پارامتر ϕ، زاویه‌ای که پرتوی یک نقطه حقیقی ساطع شده از پرده شیئی پس از خروج از مردمک خروجی سامانه اپتیکی و در محل برخورد با پرده تصویر با محور اپتیکی می‌سازد، f فاصله کانونی، و r موقعیت شعاعی تصویر نقطه شیئی روی پرده تصویر می‌باشد. مدل نهایی ابیراهی از ترکیب خطی وزنی مدل‌های یاد شده حاصل می‌شود. به عنوان نمونه کار

10.Projection

11.Perspective
12.Stereographic
13.Equisolid
14.Orthogonal

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

اورخوف و همکاران [1] در این گروه قرار می گیرد. ویژگی مهم این دیدگاه امکان پوشش طیف وسیعی از ابیراهی‌ها، از جمله ابیراهی‌های مربوط به لنزهای ماکرو[15] تا ابیراهی‌های مربوط به لنزهای تله[16] می‌باشد. روش‌های مبتنی بر مدل برگرفته شده از دیدگاه دوم، دیدگاه مبتنی بر انواع اثرات ابیراهی روی تصویر، اغلب از بسط تیلور برای مدل‌سازی ابیراهی بهره می‌برند.

به عنوان نمونه گرامفون [2] و وینسنت و همکاران [3] در کارهای خود مدل دوربین پین هول[17] را به گونه‌ای با بهره‌گیری از هموگرافی معکوس پذیر[18] اصلاح کردند که ماتریس پارامترهای داخلی و خارجی دوربین[19]، کشیدگی های ناخواسته ناشی از بزرگنمایی محلی را در خود توصیف کند. بدین سان پارامتر های مدل اصلاح شده پین هول هر چند از ماهیت فیزیکی خود فاصله گرفتند ولی در مقابل پروسه کالیبراسیون دوربین بدون نیاز به کالیبراسیون مجزا برای استخراج پارامتر های ابیراهی قابل بهره برداری می‌باشد. آنها مدل جدید دوربین را مدل پین هول مجازی[20] نامیده اند. کار این دو در نحوه تعیین پارامتر های مدل با یکدیگر تفاوت دارد.

همچنین لین و همکاران [4] در کار خود به اصلاح ابیراهی مبتنی بر مدل پرداخته اند. ایشان تابع ابیراهی را به کمک بسط تیلور مدل کرده و پارامتر های آن را با بهره‌گیری از این حقیقت تخمین زده اند که میزان ابیراهی موثر در مرکز ابیراهی نسبت به دیگر نقاط به شدت کمتر است. بنابراین اگر مرکز ابیراهی مرکز تصویر فرض شود، انتظار داریم برای یک بزرگنمایی[21]، تفاوت مکانی نقاط الگوهای حول مرکز تنها برابر پارامتر بزرگنمایی باشد و از جابجایی ناشی از کشیدگی و جمع شدگی ابیراهی تاثیر نپذیرد، در حالی که این مهم برای نقاط الگوهای دیگر بخش های تصویر این گونه نیست و میزان جابجایی این نقاط علاوه بر پارامتر بزرگنمایی متاثر از ابیراهی نیز می‌باشد. ایشان از این مهم بهره گرفته اند و برای یک بزرگنمایی مشخص، تابع ابیراهی را تخمین زده اند. احمد و همکاران [5] و همچنین هارتلی و کنگ [6] نیز از مدل یکسانی برای مدل‌سازی تابع ابیراهی بهره گرفته اند. تفاوت کار ایشان در نحوه تخمین پارامتر ها می‌باشد.

همان گونه که بیان گردید، برای بازنمایش و مدل‌سازی ابیراهی موج تکرنگ می توان از توسعه چندجمله‌ای ها بهره جست. هر چند بهره‌گیری از توسعه چندجمله‌ای زرنیک پیشتر در راهکارهای مبتنی بر پرتوهای راهنما مورد استفاده قرار گرفته است، اما بهره‌گیری از آنها تاکنون در راهکارهایی که صرفا مبتنی بر تصویر نقش بسته بر پرده تصویر طراحی می‌شوند، بر اساس جستجو های نگارنده صورت نگرفته است. بهره‌گیری از توسعه چندجمله‌ای زرنیک در مقام قیاس با بسط تیلور که در بسیاری از مقالات از آن بهره گرفته شده است [4–7] دارای ویژگی هایی است که به استناد آنها استفاده از آن می‌تواند موثرتر واقع گردد. ابتدا اینکه ضرایب زرنیک به صورت فرم کاملی از یک مجموعه متعامد روی دایره واحد تعریف می‌شوند. دوم اینکه چند جمله‌ای های زرنیک یک بازنمایش متعادل از ابیراهی را نشان می‌دهند. این بدان معنی است که چند جمله‌ای های زرنیک حاصل از ترکیب جملاتی از سری های توانی هستند که به گونه‌ای بهینه متعادل شده اند که واریانس را حول مردمک خروجی کمینه سازند [8] سوم اینکه ضریب هر جمله در توسعه چندجمله‌ای زرنیک خود نشان دهنده انحراف معیار استاندارد نسبت به آن جمله می‌باشد، که مجموع مربعات این ضرایب واریانس ابیراهی کل را نشان می‌دهد. چهارم اینکه برخلاف مدل‌های مبتنی بر بسط تیلور که نمی‌توانند بازنمایش مناسبی از ابیراهی و اعوجاج محلی باشند [9]، مدل برگرفته از چندجمله‌ای زرنیک برای بازنمایش ابیراهی و اعوجاج محلی نیازی به بخش بندی و تکه تکه سازی تصویر ندارد. و در آخر هر چند مدل تیلور برای لنزهای مرکب مناسب نیست [10]، مدل زرنیک در مدل‌سازی لنزهای مرکب می‌تواند بازدهی خود را حفظ کند. امروزه ابیراهی لنز با بهره‌گیری از روشهای مبتنی بر راه‌کارهای غیر متریک و مدل‌های خود کالیبره کننده اصلاح

15.Macro lenses
16.Tele lenses
17.Camera pinhole model
18.Invertible homography
19.Camera intrinsic and extrinsic matrix
20.Virtual pinhole model
21.Zoom

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

می‌شود [2, 11-14]. این گروه از راه‌کار ها، اغلب از بردارهای ویژگی در تصویر همانند خطوط مستقیم، دایره ها و نقاط ناپدید شدن[۲۲] استفاده می‌کنند. عدم وجود برخی از بردارهای ویژگی یاد شده و یا کاهش شمار آنها در تصویر، برخی مواقع منجر به شکست فرآیند کالیبره کردن می‌شود. به همین واسطه و به دلیل وجود برخی از ویژگی های غیر خطی لنز، استفاده از آنالیز چند طیفی[۲۳] در تشخیص و تعیین میزان ابیراهی توجیه پذیر است. اصلاح ابیراهی لنز با بهره‌گیری از آنالیز چند طیفی bi-coherence پیشتر معرفی شده است [15-17]. در استفاده از آنالیز چند طیفی خصوصیات منحصر به فردی وجود دارد. اول اینکه با بهره‌گیری از آنالیز چند طیفی، دیگر نیازی به پروسه تشخیص بردارهای ویژگی یاد شده نخواهد بود. و دوم اینکه پروسه کالیبراسیون تحت تاثیر شکست پروسه های استخراج بردارهای ویژگی قرار نمی گیرد.

روش پیشنهادی در این مقاله از مزایای مدل‌سازی به کمک توسعه ضرایب زرنیک بهره می‌برد. جملات زرنیک مد ۱ و ۲ قابلیت مدل‌سازی خطای prism را در خود دارند. به عبارتی دیگر جملات یاد شده می‌توانند عدم متعامد بودن پرده تصویر و محور اپتیکی را به شکل موثری مدل کنند. با توجه به توزیع جملات زرنیک، مدلسازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک می‌تواند در دو کلاس کلی ابیراهی‌های متقارن مشتمل بر کوما[۲۴] و اعوجاج[۲۵] و ابیراهی‌های نامتقارن شامل ابیراهی کروی[۲۶]، آستگماتیسم[۲۷] و عدم تطبیق[۲۸] صورت بپذیرد. زمانی که بواسطه خطای مونتاژ، خطای خروج از مرکز تصویر در سامانه اپتیکی ظاهر می‌شود، فرایند کالیبراسیون دیگر نمی‌تواند پارامترهای جملات متقارن را با دقت تعیین کند. چرا که وجود خطای خروج از مرکز تصویر در سامانه اپتیکی می‌تواند منجر به افزایش واریانس توزیع ابیراهی نسبت به توزیع جملات متقارن شود. بنابراین انتظار می‌رود که با وارد کردن خطای خروج از مرکز در مدل زرنیک، واریانس توزیع ابیراهی نسبت به توزیع جملات متقارن کاهش یافته و فرایند کالیبراسیون بتواند دقیقتر انجام گردد. در این راستا، ابیراهی‌های زایدل[۲۹] در قالب مومنت‌های اصلاح شده زرنیک مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم به صورت توابع مجزا روی فضای کارتزین بازنویسی می‌گردند. سپس مومنت‌های بازنویسی شده به گونه‌ای اصلاح می‌گردند که با در نظر گرفتن خطای خروج از مرکز، تابع ابیراهی فاز را نیز مدل کنند. فرایند کالیبراسیون در این تحقیق برای ابیراهی‌های متقارن و نامتقارن تصویر به ترتیب با کمینه‌سازی متوسط همبستگی روی کامیولنت‌های تصویر با بهره‌گیری از آنالیز چند طیفی tri-coherence و bi-coherence صورت پذیرفته است.

دیگر بخش های مقاله به این صورت سازمان دهی شده اند: مدل ریاضی ابیراهی لنز در بخش ۲ توضیح داده شده است. پروسه کالیبراسیون در بخش ۳ شرح داده می‌شود. بخش ۴ میزان موثر بودن و دقت راه‌کار پیشنهادی را بررسی می‌کند. و بخش ۵ نتایج را در بر دارد.

۲. مدل ریاضی ابیراهی لنز

در ابیراهی موج تکرنگ[۳۰]، $W(\rho,\theta)$ به مختصات شعاعی ρ و زاویه گردشی θ می‌تواند به صورت یک توسعه چندجمله‌ای در فرم زیر بازنمایش شود که در این رابطه c_n^m ها ضرایب توسعه زرنیک و Z_n^m چندجمله‌ای زرنیک می‌باشند.

$$W(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_n^m Z_n^m(\rho,\theta) \qquad (۱)$$

با توسعه چندجمله‌ای زرنیک تابع ابیراهی فاز می‌تواند در فرم زیر بازنویسی گردد:

$$W(\rho,\theta)= \qquad (۲)$$

22.Vanishing points
23.Poly-spectral analysis
24.Coma
25.Distortion
26.Spherical aberration
27.Astigmatism
28.Defocus
29.Seidel aberration
30.Monochromatic wave aberration

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_n^m \left[\sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}}\right] R_n^m(\rho)cos(m\theta)$$

در این رابطه نیز δ_{m0} تابع دلتای کرونکر، n و m اعداد صحیح مثبت هستند به گونه‌ای که $n-m \geq 0$ و

$$R_n^m(\rho) = \frac{\sum_{s=0}^{(n-m)/2}(-1)^s(n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!}\rho^{n-2s} \quad (۳)$$

همچنین یک تابع چندجمله‌ای با درجه m روی ρ شامل جملات ρ^n، ρ^{n-2} و ρ^m است. c_n^m ها، ضرایب توسعه زرنیک به صورت زیر خواهند بود.

$$c_n^m = \left(\frac{1}{\pi}\right)\sqrt{2(n+1)(1+\delta_{m0})} \times \int_0^1\int_0^{2\pi} W(\rho,\delta)R_n^m(\rho)cos(m\theta)\rho d\rho d\theta \quad (۴)$$

در عمل برای بازنمایش تابع ابیراهی موج از تعداد محدود N از چندجمله‌ای‌های زرنیک استفاده می‌شود. بنابراین می‌توان تابع ابیراهی موج تکرنگ را به صورت زیر خلاصه کرد.

$$W(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} C_n^m Z_n^m(\rho,\theta) + E(\rho,\theta) \quad (۵)$$

در این رابطه $E(\rho,\theta)$ خطای مدل‌سازی می‌باشد.

چندجمله‌ای زرنیک می‌تواند مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم[۳۱] به صورت توابع مجزا روی فضای کارتزین تعریف گردد. شپارد و همکاران [18] نشان دادند که بین چندجمله‌ای دایروی زرنیک و چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم روابط زیر برقرار است:

$$R_n^0(\rho) + 2\sum_{\substack{m=2 \\ m\ even}}^{n} R_n^m(\rho)cos(m\theta) = U_n(x), n\ even \quad (۶)$$

$$2\sum_{\substack{m=1 \\ m\ odd}}^{n} R_n^m(\rho)cos(m\theta) = U_n(x), n\ odd \quad (۷)$$

$$R_n^0(\rho) + 2\sum_{\substack{m=2 \\ m\ even}}^{n} (-1)^{m/2} R_n^m(\rho)sin(m\theta) = U_n(y), n\ even \quad (۸)$$

$$2\sum_{\substack{m=1 \\ m\ odd}}^{n} (-1)^{(m-1)/2} R_n^m(\rho)cos(m\theta) = U_n(y), n\ odd \quad (۹)$$

در معادلات بالا U_n چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم مرتبه n ام می‌باشد. همچنین:

$$x = \rho cos(\theta), y = \rho sin(\theta) \quad (۱۰)$$

بنابراین هر تابع دلخواه می‌تواند به سادگی به کمک چندجمله‌ای چبیشف گسترش و از این رو در چندجمله‌ای زرنیک توسعه یابد. جدول ۱ بازنمایشی از چندجمله‌ای‌های زرنیک معادل ابیراهی زایدل را نشان می‌دهد. همچنین در این جدول برای هر نوع ابیراهی، توصیف آن به کمک چندجمله‌ای چبیشف نیز نشان داده شده است. شکل ۲ نیز توزیع ابیراهی‌های زایدل را با بهره‌گیری از چندجمله‌ای زرنیک نمایش می‌دهد.

برای جبران خروج از مرکز تصویر، مدل ارایه شده به کمک چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم معادل چندجمله‌ای زرنیک به گونه‌ای اصلاح می‌شود که بردار انتقال مرکز ابیراهی در آن لحاظ گردد. به عبارتی دیگر:

$$W(x,y) = \sum_j w_j \cdot {}^{ch}Z_j(x-x_0, y-y_0) + E(x,y) \quad (۱۱)$$

ای زایدل می‌باشد. ${}^{ch}Z_j(x-x_0,y-y_0)$ توزیع هر یک از ابیراهی‌های زایدل است که به مرکزیت (x_0,y_0) به کمک چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم بیان شده است. همچنین $E(x,y)$ نیز خطای باقیمانده مدل‌سازی می باشد.

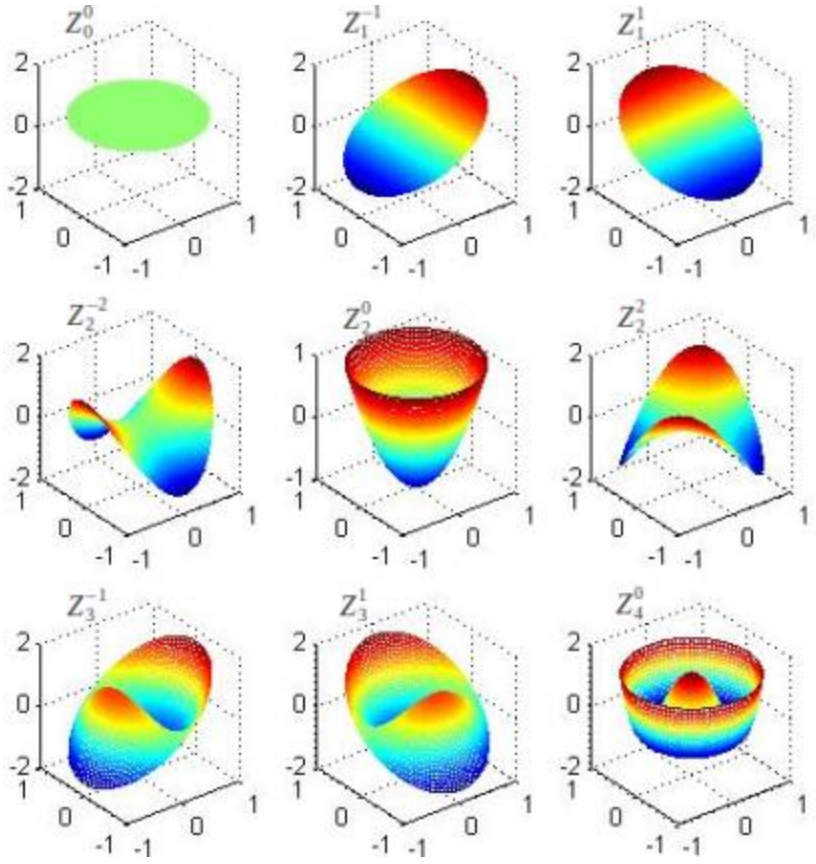
31.Second kind Chebyshev polynomial

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

جدول ۱. توسعه چندجمله‌ای زرنیک برای ابیراهی زایدل در کنار توصیف آن به کمک چندجمله‌ای چبیشف

#	مرتبه (n)	فرکانس (m)	$Z_n^m(\rho,\theta)$	مفهوم	چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم ${}^{ch}Z_j(x,y)$
۰	۰	۰	۱	مقدار ثابت (Piston)	$U_0(x)$
۱	۱	-۱	$2\rho sin(\theta)$	x–کجی (Tilt)	$\frac{1}{2}U_1(x)$
۲	۱	۱	$2\rho cos(\theta)$	y–کجی	$\frac{1}{2}U_1(y)$
۳	۲	-۲	$\sqrt{6}\rho^3 sin(2\theta)$	آستیگماتیسم (۴۵±درجه)	$\frac{1}{2}U_1(x).U_1(y)$
۴	۲	۰	$\sqrt{3}(2\rho^3-1)$	انحنای عرصه (Field curvature)، عدم تطبیق (Defocus)	$\frac{1}{2}\left(U_2(x)+U_2(y)\right)$
۵	۲	۲	$\sqrt{6}\rho^3 cos(2\theta)$	آستیگماتیسم (۰ یا ۹۰ درجه)	$\frac{1}{4}\left(-U_2(x)+U_2(y)\right)$
۷	۳	-۱	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho)sin(\theta)$	y–کوما (Coma)	$\frac{3}{8}\left(U_1(x)U_2(y)+U_3(x)\right) + \frac{1}{8}\left(U_1(x)\right)$
۸	۳	۱	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho)cos(\theta)$	x–کوما	$\frac{3}{8}\left(U_1(y)U_2(x)+U_3(y)\right) + \frac{1}{8}\left(U_1(y)\right)$
۱۲	۴	۰	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2)sin(4\theta)$	ابیراهی کروی (Spherical)، عدم تطبیق (Defocus)	$\frac{3}{4}U_2(x)U_2(y) + \frac{3}{8}\begin{pmatrix}U_4(x)+U_4(y)+\\ U_2(x)+U_2(y)\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(U_0(x)\right)$

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026



شکل ۲. ابیراهی‌های زایدل با بهره‌گیری از چندجمله‌ای زرنیک از چپ به راست و از بالا به پایین عبارتند از Z_0^0: مقدار ثابت (Piston)، Z_1^{-1}: x–کجی (Tilt)، Z_1^1: y–کجی، Z_2^{-2}: آستیگماتیسم (۴۵±درجه)، Z_2^0: انحنای عرصه (Field curvature)، Z_2^2: آستیگماتیسم (۰ یا ۹۰ درجه)، Z_3^{-1}: y–کوما (Coma)، Z_3^1: x–کوما، Z_4^0: ابیراهی کروی (Spherical)، عدم تطبیق (Defocus)، عدم تطبیق (Defocus)

۳. پروسه کالیبراسیون

شکل ۳ اجزای پایه یک سامانه اپتیکی متقارن را توضیح می‌دهد. در یک چنین سامانه ای، یک پرتو که از مردمک خروجی خارج می‌شود پرده تصویر را در مختصات (X', Y') قطع می‌کند. عموما، این پرتو از نقطه ایده آل خود روی پرده تصویر نمی‌گذرد. این مهم در شکل ۴ به تصویر کشیده شده است. می توان در نظر گرفت که اگر نقطه انحراف در شرایط عمل $\vec{H} = H_x\hat{\imath} + H_y\hat{\jmath}$ باشد و نقطه ایده‌آل در مختصات (h'_x, h'_y)، آنگاه نقطه تقاطع با پرده تصویر در مختصات (X', Y') خواهد بود.

$$(X', Y') = (h'_x, h'_y) + (\epsilon_x, \epsilon_y) \qquad (۱۲)$$

با در نظر گرفتن تابع ابیراهی در مختصات کارتزین، ضرایب ϵ_x و ϵ_y می‌توانند به فرم تابع موج ابیراهی تکرنگ بصورت زیر تخمین زده شوند.

$$W(x,y) = \sum_j w_j \, {}^{ch}Z_j(x - x_0, y - y_0) \qquad (۱۳)$$

نسبت به مکان ایده ال خود روی پرده تصویر، با دیفرانسیل محلی جبهه ابیراهی موج تکرنگ در آن نقطه متناسب است، داریم:

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = \frac{\epsilon_y(x,y)}{f}$$
$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = \frac{\epsilon_x(x,y)}{f} \quad (۱۴)$$

که f فاصله کانونی لنز می‌باشد. با مشتق‌گیری از معادله ۱۳ نسبت به xو yو جایگزین کردن آن در معادله ۱۴، رابطه ۱۵ نتیجه می‌شود.

$$\frac{\epsilon_y(x,y)}{f} = \sum_j w_j \frac{\partial^{ch} Z_j(x-x_0, y-y_0)}{\partial y}$$
$$\frac{\epsilon_x(x,y)}{f} = \sum_i w_j \frac{\partial^{ch} Z_j(x-x_0, y-y_0)}{\partial x} \quad (۱۵$$

معادله ۱۵ مقادیر ابیراهی را در قالب ابیراهی زرنیک اصلاح شده توصیف می‌کند. ضرایب زرنیک اصلاح شده w_j می‌توانند با بهره‌گیری از آنالیز چند طیفی تخمین زده شوند. اجزای پرتو ابیراهی می‌توانند در دو کلاس کروماتیک و آستیگماتیک طبقه بندی شوند. از آنجایی که اجزای کروماتیک و آستیگماتیک کوپل همدیگر نیستند لذا نمی‌توانند برای متعادل کردن یکدیگر بکار روند. اجزای آستیگماتیک شامل ابیراهی کروی، آستیگماتیسم و عدم تطبیق بوده و ابیراهی کروماتیک مشتمل بر کوما و اعوجاج است. بعلاوه چندجمله‌ای های زرنیک نیز می‌توانند برای ابیراهی‌های متقارن (ابیراهی‌های کروماتیک) و همچنین ابیراهی‌های نامتقارن (ابیراهی‌های آستیگماتیک) در دو کلاس متقارن و نامتقارن دسته‌بندی شوند. از طرفی می دانیم که آنالیز چند طیفی tri-coherence ذاتا به سیگنال های متقارن حساس است و همچنین آنالیز چند طیفی bi-coherence به سیگنال های نامتقارن [19]. بنابراین بهره‌گیری از آنالیز چند طیفی tri-coherence و bi-coherence به ترتیب برای تخمین پارامتر های کلاس کلی ابیراهی‌های متقارن و نامتقارن قابل توجیه است. و انتظار می رود که مقادیر واقعی ابیراهی لنز را بتوان به گونه‌ای مناسب تر تخمین زده و متوسط همبستگی محاسبه شده را کمینه سازند.

بنابراین تابع هزینه زیر جهت استخراج پارامترهای مجهول مورد بحث پیشنهاد می‌گردد:

$$F(w_1, w_{1,}.., w_j, x_0, y_0) = \frac{1}{\frac{1}{N \times M} \sum_{f_h=1}^{N} \sum_{f_v=1}^{M} \left| \beta_{f_h f_v} - \beta'_{f_h f_v} \right|^2} \quad (۱۶)$$

در این رابطه $\beta_{f_1 f_2}$ و $\beta'_{f_1 f_2}$ به ترتیب ماتریس‌های آنالیز چند طیفی تصویر مبدأ و تصویر اصلاح شده می‌باشند. همچنین، f_h و f_v مولفه‌های فرکانس افقی و عمودی تصویر می‌باشند. N و M نیز به ترتیب تعداد مولفه‌های افقی و عمودی فرکانس تصویر هستند.

با توجه به مطالب یاد شده الگوریتم کلی اصلاح ابیراهی تصویر به صورت شکل صفحه بعد پیشنهاد می‌شود

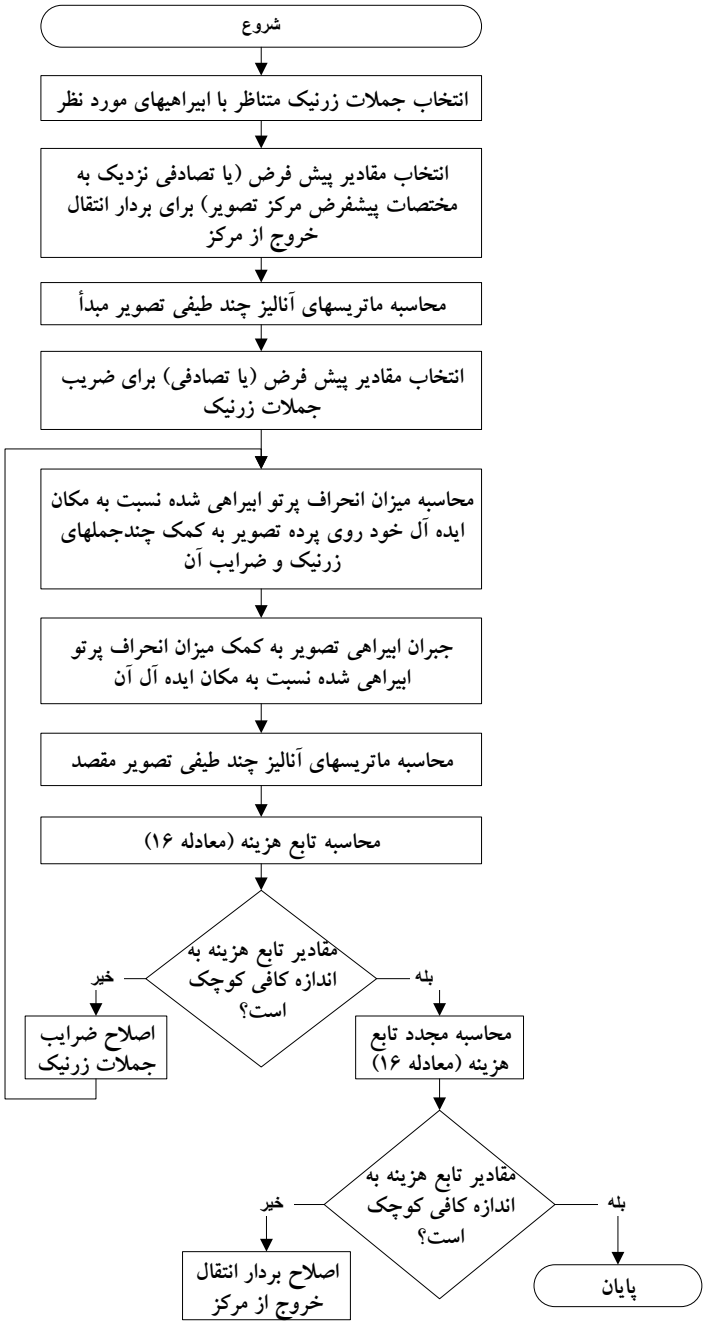
۴. نتایج آزمایشگاهی

جهت تحقیق میزان اعتبار راه‌کار پیشنهادی، دو تابع F_1 و F_2 به عنوان توابع ابیراهی در نظر گرفته شده است. سپس سعی گردیده توابع توزیع ابیراهی توسط چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک به نحو مناسبی مدل شود و کیفیت دقت و بازدهی آنها مورد تحلیل قرار گیرد. وجه تمایز تابع F_1 با F_2 در تقارن آن دو می‌باشد. لازم به توضیح است که مرکز این دو تابع در مختصه $[0.2,0.2]$ در دستگاه مختصات کارتزین قرار دارد و مقدار آن‌ها نیز در بازه $[-1,1]$ بهنجار[۳۲] شده است.

رابطه ۱۷ معادله اولین تابع ابیراهی پیش فرض (F_1) را بیان می‌کند. همچنین این تابع در شکل ۵-الف نشان داده شده است. شکل‌های ۵-ب و ۵-پ به ترتیب توابع ابیراهی تخمین زده شده را برای تابع ابیراهی F_1 به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک نشان می‌دهند

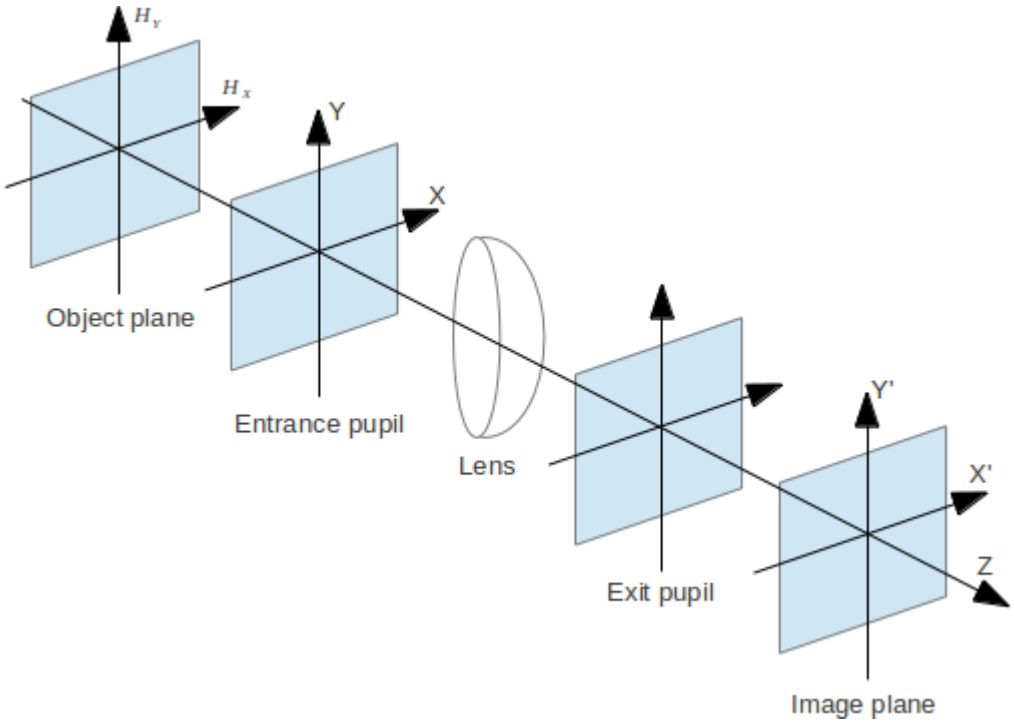
32.Normalize

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

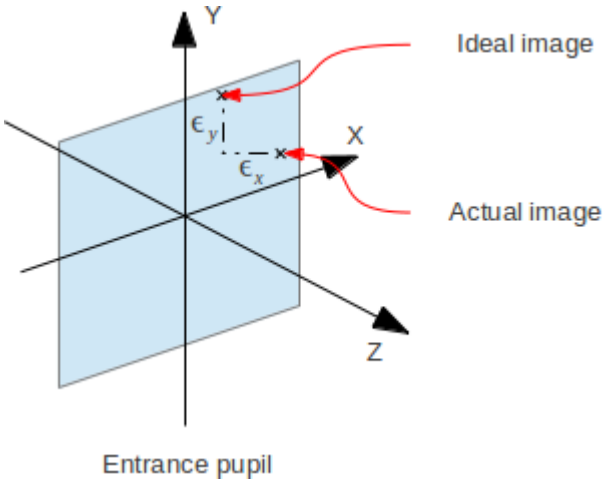


الگوریتم پیشنهادی اصلاح ابیراهی تصویر

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026



شکل ۳. اجزای پایه یک سامانه اپتیکی متقارن



شکل ۴. پرده تصویر و مختصه پرتویی ابیراهی یافته نسبت به شرایط ایده آل

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

همچنین شکل‌های ۵-ت و ۵-ث نیز به ترتیب خطای تخمین تابع ابیراهی F_1 را برای مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک نشان می‌دهند. مقایسه نمودار خطای باقیمانده توسط مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک (شکل‌های ۵-ت و ۵-ث) نشان می‌دهد که به واسطه وجود بردار خروج از مرکز، مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک نتوانسته است تخمین مناسبی از تابع F_1 را ارائه کند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در تخمین به کمک چندجمله‌ای زرنیک به علت عدم تخمین مناسب پارامترهای مربوط به جملات متقارن، تقارن تابع هدف به درستی تخمین زده نشده است و این تقارن در نمودار خطای باقیمانده توسط مدل قابل روئیت است. این در حالی است که در مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک تقارن یاد شده وجود ندارد. همچنین شکل ۵-ج تابع نقطه گستر[۳۳]عدم توفیق مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک را نسبت به مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک نشان می‌دهد. مطالعه این شکل نیز نشان از میزان مؤثر بودن جبران خروج از مرکز تصویر در مدل‌سازی ابیراهی به کمک چندجمله‌ای زرنیک دارد.

$$F1: (y-0.2)^2 + (x-0.2)^2 \quad (normalized\ between\ [-1,1]) \qquad (۱۷)$$

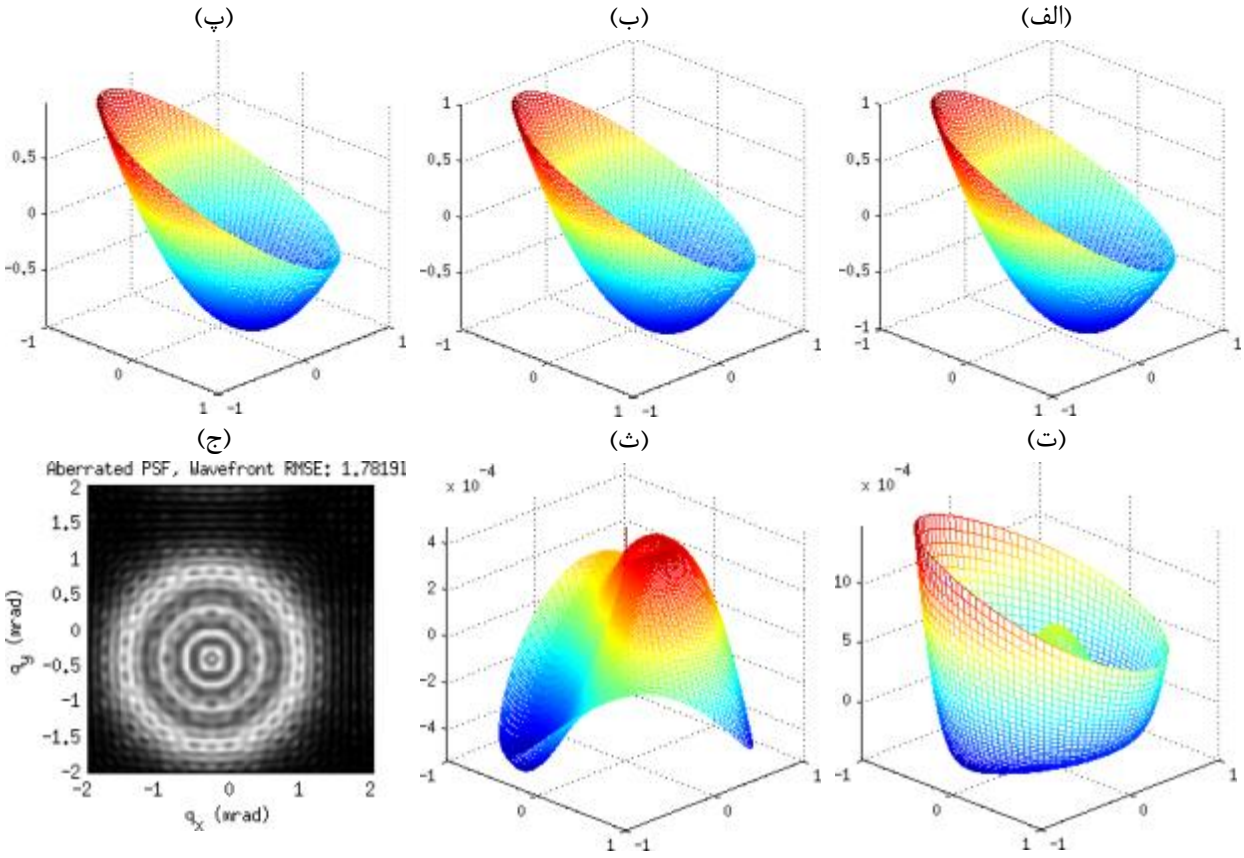
جدول ۲ نتایج عددی در تخمین تابع F_1 را بررسی می‌کند. مطالعه این جدول نشان می‌دهد که ضریب مد دوازده چندجمله‌ای زرنیک نزدیک به ۱۸ مرتبه کاهش یافته است. با در نظر گرفتن توزیع تابع ابیراهی پیش‌فرض (شکل ۵-الف) و همچنین توزیع جمله مد دوازدهم چندجمله‌ای زرنیک (شکل ۱)، این کاهش را می‌توان توفیق مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک در مدل‌سازی تابع ابیراهی مورد نظر دانست. چرا که طبق انتظار سهم بسیار کمتری به ابیراهی کروی و یا عدم تطبیق در نظر گرفته شده است. همچنین مقایسه بیشینه اندازه خطای باقیمانده در مدل‌سازی به کمک زرنیک اصلاح شده نشان از بهبود ۲.۷ برابری راه‌کار پیشنهادی دارد. بعلاوه جذر میانگین مربعات خطا نیز بهبود ۱.۴۹ برابری را نشان می‌دهد.

رابطه ۱۸ معادله دومین تابع ابیراهی پیش فرض (F_2) را بیان می‌کند. شکل ۶-الف ترسیم این تابع را نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل ۶-الف دیده می‌شود تقارن در توزیع ابیراهی این تابع ضعیف است. بنابراین انتظار می‌رود که بهره‌گیری از پروسه سنجش مرکز تصویر تاثیری در دقت نتایج نداشته باشد. شکل‌های ۶-ب و ۶-پ به ترتیب توابع ابیراهی تخمین زده شده را برای تابع ابیراهی F_2 به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک نشان می‌دهند. همچنین شکل‌های ۶-ت و ۶-ث نیز به ترتیب خطای تخمین تابع ابیراهی F_2 را برای مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک نشان می‌دهند. مقایسه نمودار خطای باقیمانده توسط مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک (شکل‌های ۶-ت و ۶-ث) نشان می‌دهد که مدل‌سازی با بهره‌گیری از چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک توفیق چندانی در دقت نتایج نسبت به مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک ندارد. شکل ۶-ج، تابع نقطه گستر میزان توفیق مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک را نسبت به مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک نشان می‌دهد. مقایسه تابع نقطه گستر نمایش داده شده در شکل ۶-ج با تابع نقطه گستر نمایش داده شده در شکل ۵-ج نیز این مهم را یادآوری می‌کند. همچنین این مهم در جدول ۳ نیز قابل مشاهده می‌باشد. این جدول نتایج عددی در تخمین این تابع را به کمک چندجمله‌ای زرنیک و چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک بررسی می‌کند. مطالعه این جدول نشان می‌دهد که به دلیل نقش بالای جملات نامتقارن در تخمین ابیراهی کل، الزاما تعیین دقیق خروج از مرکز تصویر تأثیر بارزی در میزان دقت تخمین ابیراهی کل ندارد. این مهم با مقایسه بیشینه اندازه خطای باقیمانده در مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک اصلاح شده و چندجمله‌ای زرنیک قابل تحقیق است. همچنین مقایسه جذر میانگین مربعات خطا نیز در مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای زرنیک اصلاح شده و چندجمله‌ای زرنیک این مهم را تأیید می‌کند.

$$F2: (y-0.2)^3 + (x-0.2)^4 \quad (normalized\ between [-1,1]) \qquad (۱۸)$$

33.Power Separated Function (PSF)

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

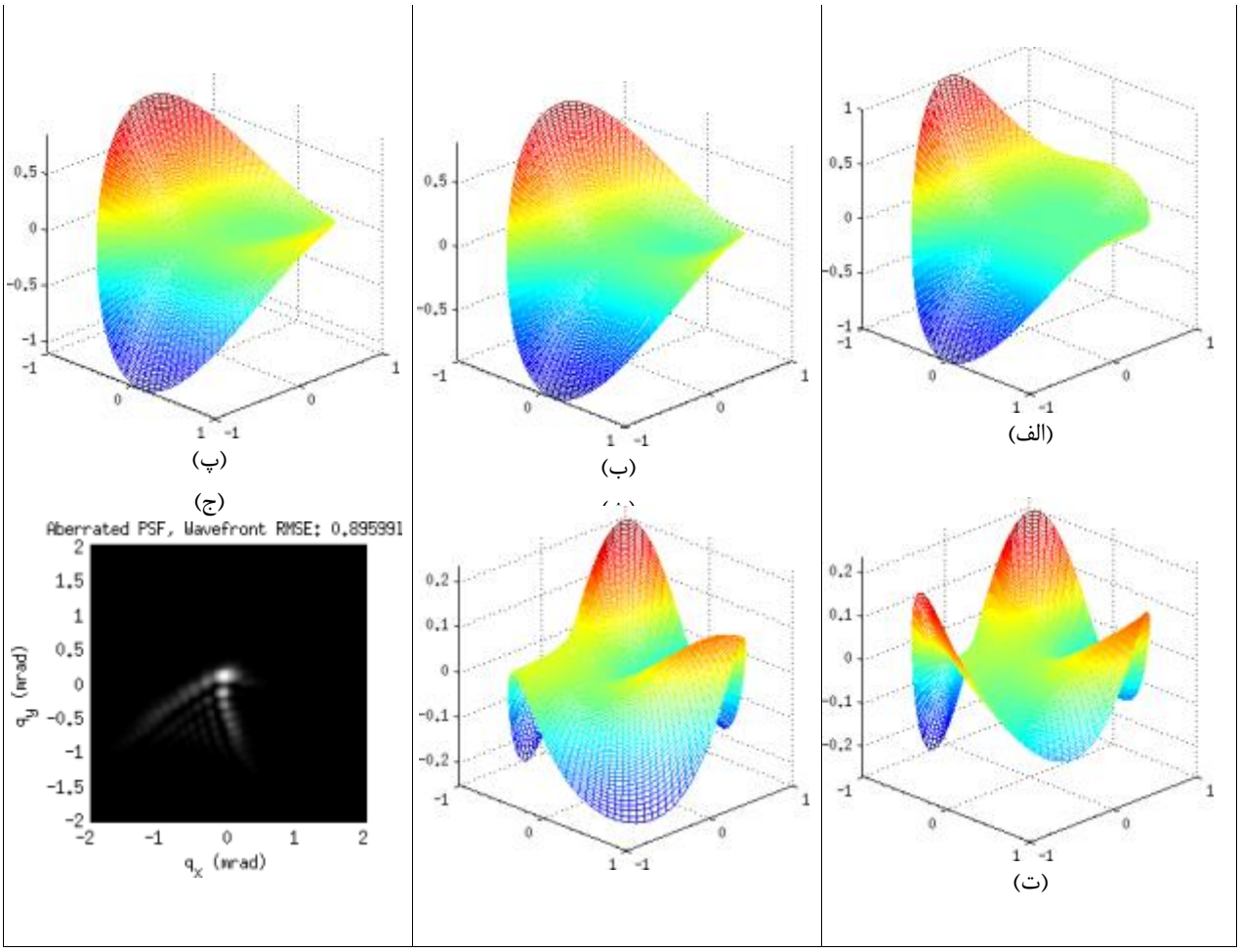


شکل ۵. تحقیق میزان اعتبار راه‌کار پیشنهادی برای تابع F_1، الف) تابع ابیراهی مفروض، ب) تابع ابیراهی تخمین زده شده با چندجمله‌ای زرنیک، پ) تابع ابیراهی تخمین زده شده با چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک، ت) خطای‌مدل سازی با چندجمله‌ای زرنیک، ث) خطای مدل‌سازی با چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک، ج) تابع نقطه گستر عدم مدل‌سازی با چندجمله‌ای زرنیک نسبت به چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک

جدول ۱. مقایسه کمی راه‌کار مبتنی بر زرنیک اصلاح شده با راه‌کار مبتنی بر زرنیک در مدل‌سازی تابع ابیراهی F_1

مد#	مرتبه (n)	فرکانس (m)	ضرایب زرنیک	ضرایب زرنیک اصلاح شده
۰	۰	۰	-۰.۵۲۳۰۴۰	-۰.۵۲۳۰۴۰
۱	۱	-۱	-۰.۴۳۰۸۵۲	-۰.۵۹۳۰۷۸
۲	۱	۱	-۰.۴۳۰۸۷۹	۰.۱۴۰۲۸۳
۳	۲	-۲	-۰.۰۰۰۰۱۹	-۰.۰۰۰۱۳۳
۴	۲	۰	۰.۶۲۲۰۲۳	۰.۶۲۱۶۱۲
۵	۲	۲	۰.۰۰۰۰۱۰	۰.۰۰۰۰۲۳
۷	۳	-۱	-۰.۰۰۰۲۰۷	-۰.۰۰۰۱۹۲
۸	۳	۱	-۰.۰۰۰۱۹۹	۰.۰۰۰۰۵۳
۱۲	۴	۰	۰.۰۰۰۵۶۲	۰.۰۰۰۰۳۱
بیشینه اندازه خطای باقیمانده			۰.۰۰۱۴۷۵	۰.۰۰۰۵۳۶
جذر میانگین مربعات خطا			۰.۰۰۰۴۰۰	۰.۰۰۰۲۶۸

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026



شکل ۶. تحقیق میزان اعتبار راه‌کار پیشنهادی برای تابع F_2، الف) تابع ابیراهی مفروض، ب) تابع ابیراهی تخمین زده شده با چندجمله‌ای زرنیک، پ) تابع ابیراهی تخمین زده شده با چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک، ت) خطای‌مدل سازی با چندجمله‌ای زرنیک، ث) خطای مدل‌سازی با چندجمله‌ای اصلاح شده. زرنیک، ج) تابع نقطه گستر عدم مدل‌سازی با چندجمله‌ای زرنیک نسبت به چندجمله‌ای اصلاح شده. زرنیک.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی مدل جدیدی برای تخمین توأم تابع ابیراهی فاز و خطای خروج از مرکز تصویر پرداخته شد. برای این منظور ابیراهی‌های زایدل در قالب مومنت‌های اصلاح شده زرنیک مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم به صورت توابع مجزا روی فضای کارتزین بازنویسی گردیدند. سپس مومنت‌های بازنویسی شده به گونه‌ای مورد اصلاح قرار گرفتند که خطای خروج از مرکز تصویر نیز در آن لحاظ شود. جهت فرایند کالیبراسیون، جمله‌های مدل در قالب دو کلاس متقارن و نامتقارن تقسیم شدند.

سپس فرایند تخمین پارامترهای جملات متقارن و نامتقارن به ترتیب با بهره‌گیری از آنالیز tri-coherence و bi-coherence صورت پذیرفته است. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که در صورت وجود بردار خروج از مرکز، مدل‌سازی به کمک چندجمله‌ای اصلاح شده زرنیک بازدهی بالاتری را حاصل می‌کند. به گونه‌ای که در نمونه مورد سنجش، کاهش ۱/۴۹ برابر جذر میانگین مربعات خطا در تخمین تابع ابیراهی فاز گزارش شده است.

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

جدول ۳. مقایسه کمی راه‌کار مبتنی بر زرنیک اصلاح شده با راه‌کار مبتنی بر زرنیک در مدل‌سازی تابع ابیراهی F_2

مد#	مرتبه(n)	فرکانس(m)	راه‌کار مبتنی بر زرنیک	راه‌کار مبتنی بر زرنیک اصلاح شده
۰	۰	۰	-۰.۱۳۲۲۴۸	-۰.۱۳۲۲۴۸
۱	۱	-۱	-۰.۲۰۲۰۱۹	۰.۱۴۶۹۴۲
۲	۱	۱	۰.۲۸۹۹۷۴	۰.۳۲۹۱۲۴
۳	۲	-۲	۰.۳۰۳۶۲۹	-۰.۱۴۳۴۲۱
۴	۲	۰	۰.۰۵۲۶۷۰	۰.۰۳۷۶۴۳
۵	۲	۲	-۰.۰۰۰۰۳۲	-۰.۲۸۶۷۶۴
۷	۳	-۱	-۰.۰۶۶۲۸۳	۰.۰۵۹۹۱۲
۸	۳	۱	۰.۰۸۲۸۷۴	۰.۱۳۰۹۱۲
۱۲	۴	۰	۰.۰۲۶۱۹۰	-۰.۰۰۱۷۵۴
بیشینه اندازه خطای باقیمانده			۰.۲۶۹۵۶۴	۰.۲۵۱۰۹۷
جذر میانگین مربعات خطا			۰.۰۵۱۵۴۹	۰.۰۵۸۱۵۳

منابع

1.V. Orekhov and B. Abidi, “Universal camera calibration with automatic distortion model selection,” in *Image Processing, 2007.ICIP 2007.IEEE International Conference on*, 2007, p. VI - 397 - VI - 400.

2.R. G. V. Gioi, “Towards high-precision lens distortion correction,” in *Image Processing (ICIP), 2010 17th IEEE International Conference on*, 2010, pp. 4237 - 4240.

3.C. Y. Vincent, “Multiview camera-calibration framework for nonparametric distortions removal,” *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 21, no. 5, pp. 1004 - 1009, 2005.

4.C. Lin, S. Chang, and Y. Lay, “Automatic distortion measuring system with reticle positioning for enhanced accuracy,” *Measurement*, 2008.

5.M. Ahmed, “Nonmetric calibration of camera lens distortion: differential methods and robust estimation,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 8, pp. 1215 - 1230, 2005.

6.R. Hartley and S. B. Kang, “Parameter-free radial distortion correction with center of distortion estimation,” *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 8, pp. 1309-1321, 2007.

7.S. Aritan, “Efficiency of non-linear lens distortion models in biomechanical analysis of human movement,” *Measurement*, vol. 43, no. 6, pp. 739-746, 2010.

8.V. Mahajan, *Optical imaging and aberrations*. SPIE Press, 1998.

9.C. Ricolfe-Viala and Antonio-José Sánchez-Salmerón, “Correcting non-linear lens distortion in cameras without using a model,” *Optics & Laser Technology*, vol. 42, no. 4, pp. 628–639, 2010.

10.B. Tordoff and D. W. Murray, “The impact of radial distortion on the self-calibration of rotating cameras,” *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 96, no. 1, pp. 17–34, 2004.

11.J.-P. Tardif, P. Sturm, M. Trudeau, and S. Roy, “Calibration of Cameras with Radially Symmetric Distortion,” *IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS …*, vol. 31, no. 9, pp. 1552 - 1566, 2009.

12.J. Lin, M. Xing, D. Sha, D. Su, and T. Shen, “Distortion measurement of CCD imaging system with short focal length and

Downloaded from jor.iranaict.ir at 18:30 +0330 on Sunday November 22nd 2026

large-field objective," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 43, no. 10, pp. 1137-1144, Oct. 2005.

13.F. Devernay and O. Faugeras, "Straight lines have to be straight," *Machine Vision and Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 14-24, Aug. 2001.

14.C. Hughes, R. McFeely, P. Denny, M. Glavin, and E. Jones, "Equidistant fish-eye perspective with application in distortion centre estimation," *Image and Vision Computing*, vol. 28, no. 3, pp. 538-551, Mar. 2010.

15.H. Farid and A. C. Popescu, "Blind removal of lens distortion," *JOSA A*, vol. 18, no. 9, pp. 2072-2078, 2001.

16.W. Yu, "Image-based lens geometric distortion correction using minimization of average bicoherence index," *Pattern Recognition*, vol. 37, no. 6, pp. 1175-1187, 2004.

۱۷.رهبر، کامبیز؛ فائز، کریم؛ اصلاح نقص ابیراهی لنز دوربین با بهره گیری از مومنت های زرنیک، فصلنامه فناوری اطلاعات و ارتباطات ایران، سال دوم، شماره های ۵ و۶، پاییز و زمستان ۱۳۸۹.

18.C. J. R. Sheppard, S. Campbell, and M. D. Hirschhorn, "Zernike expansion of separable functions of Cartesian coordinates" *Applied optics*, vol. 43, no. 20, pp. 3963-6, Jul. 2004.

19.J. Fackrell and S. McLaughlin, "Non-linearity detection for condition monitoring using higher order statistics," *Proc. COMADEM'96*, 1996.