

## کنترل ماهواره با رویکرد کنترل پیش‌بین و با استفاده از توابع لاگر

شکوفه جعفری فشارکی<sup>۱\*</sup> فرزاد توحید خواه<sup>\*\*</sup> حیدرعلی طالبی<sup>\*\*\*</sup>

\*گارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

\*\*دانشیار، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

\*\*\*استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۳/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۶/۱۰

### چکیده

در این مقاله یک کنترل‌کننده بر اساس کنترل پیش‌بینی جهت هدایت و کنترل ماهواره پیشنهاد شده است. امروزه کنترل‌کننده‌ی پیش‌بینی یک روش عملی شناخته شده جهت کنترل سیستم‌های مختلف در صنعت به شمار می‌رود. یکی از چالش‌های موجود بر سر راه اعمال عملی این نوع کنترل‌کننده‌ها بار محاسباتی آن‌ها و زمان بر بودن عملیات کنترلی آن در هر گام زمانی می‌باشد. در این پژوهش برای کاهش بار محاسباتی کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین استفاده از توابع لاگر پیشنهاد شده است. برای نشان دادن امکان پذیری و اعتبار کنترل‌کننده‌ی طراحی شده، نتایج شبیه‌سازی حاصل از اعمال آن روی یک مدل از ماهواره آورده شده است. همچنین مقایسه‌ای بین زمان محاسبات کنترل‌کننده با استفاده از توابع لاگر و در غیاب آن‌ها انجام گرفته است.

کلید واژگان: ماهواره، کنترل پیش‌بین، توابع لاگر.

### ۱. مقدمه

کنترل پیش‌بین<sup>۱</sup> به دسته‌ای از الگوریتم‌های کامپیوتری کنترل اطلاق می‌شود که از مدل سیستم به صورت مستقیم برای پیش‌بینی پاسخ آینده‌ی آن استفاده می‌کند. در هر بازه‌ی زمانی الگوریتم کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین سعی بر آن دارد که با محاسبه‌ی یک دنباله از متغیرهای کنترلی رفتار آینده‌ی سیستم را بهینه‌سازی نماید. اولین المان از این توالی ورودی کنترلی بهینه شده به سیستم اعمال می‌گردد و در بازه‌ی زمانی بعدی برای به دست آوردن ورودی کنترلی جدید، محاسبات دوباره تکرار می‌گردد [۱].

معمولاً مدلی که برای طراحی کنترل پیش‌بین استفاده می‌شود مدل فضای حالت<sup>۲</sup> است که اطلاعات مورد نیاز در هر گام کنترلی جهت پیش‌بینی آینده با استفاده از حالت‌های کنونی سیستم به دست می‌آیند [۲].

تنها روش کنترل پیشرفته طراحی شده که تأثیر قابل توجهی در مهندسی کنترل صنعتی داشته است، کنترل پیش‌بین می‌باشد [۳]. تجربه‌های عملی و تئوری زیادی بیانگر آن بوده است که کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین عملکرد خوبی برای دسته‌ی وسیعی از سیستم‌ها داشته است. یکی از ویژگی‌های اصلی کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین که آن را به ویژه در صنعت محبوب کرده است توانایی برخورد مستقیم این کنترل‌کننده با قیود سخت موجود در سیستم می‌باشد. علاوه بر این کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین به سادگی قابل تعمیم برای سیستم‌های چند متغیره، تاخیردار و غیر حداقل فاز است [۲] و [۴-۵].

تمام این‌ها در حالی است که یکی از مهم‌ترین چالش‌هایی که بر سر راه پیاده‌سازی عملی کنترل پیش‌بین وجود دارد و اعمال آن را محدود کرده است بار محاسباتی روی خط این کنترل‌کننده می‌باشد [۲] و [۶]. در نتیجه در سیستم‌هایی که زمان نمونه‌برداری آن‌ها بسیار کوچک باشد و یا دینامیک سیستم پیچیده باشد کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین در هر گام زمانی با تعداد زیادی متغیر تصمیم‌گیری رو به رو خواهد بود و همین باعث کاهش سرعت اجرای بلادرنگ این کنترل‌کننده می‌باشد. یکی از روش‌هایی که برای کاهش بار محاسباتی کنترل‌کننده‌ی

<sup>۱</sup> Model Predictive Control(MPC)

<sup>۲</sup> State Space model

پیش‌بین استفاده می‌شود آن است که سیگنال کنترل به صورت تابعی از شرایط اولیه به صورت خارج از خط محاسبه شده و در یک جدول مراجع‌های قرار می‌گیرد تا کنترل‌کننده به صورت روی خط با توجه به شرایط اولیه‌ی سیستم به این جدول مراجعه نموده و ورودی کنترلی را برای سیستم محاسبه کند [۷]-[۸]. این روش توانسته است در سیستم‌های کوچک سرعت را تا ۱۰۰ برابر افزایش دهد [۹] اما در این روش با افزایش پارامترهایی چون افق پیش‌بینی، کنترل، تعداد حالت‌ها و ورودی‌ها تعداد المان‌های این جدول به صورت نمایی افزایش می‌یابد. بنابراین در سیستم‌های بزرگ اجرای این روش عملی نیست.

یکی از رویکردهای بسیار مناسب برای کاهش بار محاسباتی این کنترل‌کننده استفاده از توابع لاگر در طراحی آن می‌باشد. با پارامتری کردن دنباله سیگنال کنترل می‌توان به طور موثری تعداد قیود موجود در افق پیش‌بینی و در نتیجه تعداد پارامترهایی که در هر گام کنترل‌کننده با آن سر و کار دارد را کاهش داد و بار محاسباتی این کنترل‌کننده برای سیستم‌های با ابعاد وسیع و یا دینامیک سریع را کم کرد.

علاوه بر این یک عامل کاهش‌ی‌نمایی در توابع لاگر وجود دارد که تضمین‌کننده همگرایی تفاضل سیگنال کنترل به سمت صفر، بعد از یک مدت زمان گذرا می‌باشد. بنابراین در بیشتر موارد می‌توان قیود تنها در این دوره‌ی گذرا از پاسخ اعمال نمود و در نتیجه تعداد قیود موجود در مسئله‌ی کنترل پیش‌بین را نیز کاهش داد [۲].

بنابر یک تعریف کلی، ماهواره<sup>۱</sup> به دستگاه‌های ساخت بشر گفته می‌شود که در مدارهایی در فضا به گرد زمین یا سیارات دیگر می‌چرخند. ماهواره‌ها برای اهداف مختلفی استفاده می‌شوند. اهمیت آن‌ها برای مخابرات و بررسی منابع زمینی و پژوهش و کاربردهای نظامی و جاسوسی روزافزون است. معمولاً یک ماهواره دارای سیستمی نیمه خودکار و کنترل شده توسط کامپیوتر می‌باشد.

علاوه بر تمام این موارد، سیستم ماهواره یک سیستم چند متغیره<sup>۲</sup> بوده و نیازمند کنترل بلادرنگ است و قیود زیادی مانند قیود روی سیگنال ورودی، نرخ تغییرات سیگنال ورودی و سیگنال خروجی در سیستم آن وجود دارد. بنابراین کنترل پیش‌بین می‌تواند انتخاب مناسبی برای کنترل و یا پایدارسازی سیستم یک ماهواره باشد.

در این مقاله هدف طراحی یک کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین برای کنترل یک ماهواره است به طوری که ماهواره بتواند یک مسیر از پیش مشخص را دنبال کند. در طراحی این کنترل‌کننده از توابع لاگر<sup>۳</sup> استفاده می‌شود

تا بار محاسباتی کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین طراحی شده کاهش یابد. همچنین برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی مربعی موجود در کنترل پیش‌بین از برنامه ریزی مربعی هیلدرث<sup>۴</sup> استفاده خواهد شد. در ادامه برای مقایسه‌ی زمان محاسبات کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لاگر و کنترل پیش‌بین معمولی، کنترل پیش‌بین طراحی شده بدون استفاده از توابع لاگر نیز جهت کنترل ماهواره اعمال می‌شود و زمان انجام محاسبات برای هر دو روش اندازه‌گیری خواهد شد. همان‌طور که انتظار می‌رود کنترل پیش‌بین معمولی زمانی بسیار بیشتر از کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لاگر نیاز دارد.

در ادامه مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش دوم دینامیک ماهواره که برای آن کنترل پیش‌بین طراحی می‌شود معرفی خواهد شد. در بخش سوم به فرمول‌بندی کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لاگر و روش برنامه‌ریزی مربعی هیلدرث به طور مختصر پرداخته خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی حاصل از اعمال کنترل‌کننده‌ی طراحی شده (با استفاده از توابع لاگر) و کنترل پیش‌بین معمولی و مقایسه‌ی انجام شده بین این دو در بخش چهارم آورده شده است. در پایان در بخش پنجم نتیجه‌گیری حاصل از مقاله ارائه خواهد شد.

## ۲. مدل‌سازی ماهواره

برای به دست آوردن معادلات دینامیکی حاکم بر ماهواره در ابتدا به معرفی دستگاه مختصاتی که معادلات در آن تعریف می‌گردد پرداخته می‌شود. در این دستگاه مختصات محور  $Z$  نشان دهنده‌ی جهت حرکت، محور  $X$  نشان دهنده‌ی صفحه‌ی چرخش و محور  $Y$  بردار نرمال صفحه‌ی چرخش است و این سه محور یک دستگاه مختصات راست‌گرد متعامد را جهت معرفی دینامیک ماهواره نشان می‌دهند.

معادلات خطی شده‌ی یک ماهواره حول مبدا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} T_x &= -4\omega_o^2 (I_z - I_y) \varphi - I_{xz} \omega_o^2 \psi + 2\omega_o I_{xy} \dot{\theta} \\ &\quad + \omega_o (I_y - I_x - I_z) \dot{\psi} + I_{xz} \ddot{\varphi} - I_{xy} \ddot{\theta} - I_{xz} \ddot{\psi} \\ T_y &= I_y \ddot{\theta} - I_{xy} \ddot{\varphi} - I_{yz} \ddot{\psi} - 3\omega_o^2 (I_z - I_x) \theta \\ &\quad - I_{xy} \omega_o^2 \varphi + I_{yz} [\omega_o^2] \psi + 2I_{xy} \omega_o \dot{\psi} \\ T_z &= I_z \ddot{\psi} - I_{xz} \ddot{\varphi} - I_{yz} \ddot{\theta} + I_{xz} \omega_o^2 \varphi + (I_y - I_x) \omega_o^2 \psi \\ &\quad + (I_x - I_y - I_z) \omega_o \dot{\varphi} - 2\omega_o I_{xy} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\theta, \varphi, \psi$  به ترتیب نشان دهنده‌ی زاویه‌ی چرخش<sup>۵</sup>، جهش<sup>۶</sup> و غلتش<sup>۷</sup> است و زوایای حرکت ماهواره را نشان می‌دهند.

<sup>4</sup> Hildreth's quadratic programming

<sup>5</sup> Yaw

<sup>6</sup> Pitch

<sup>7</sup> Roll

<sup>1</sup> Satellite

<sup>2</sup> Multi input-Multi output(MIMO)

<sup>3</sup> Laguerre functions

همچنین فرض بر آن است که تعداد خروجی‌های سیستم کمتر یا برابر با تعداد ورودی‌هاست ( $q \leq m$ ).

$$\begin{aligned} \text{سیستم با معادلات گسسته‌ی فضای حالت زیر توصیف می‌شود:} \\ x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y(k) = C_m x_m(k) \end{aligned} \quad (4)$$

به‌طوری‌که  $u$  بردار ورودی کنترلی،  $y$  بردار خروجی سیستم و  $x_m$  بردار حالت سیستم را نشان می‌دهد. برای تغییر مدل با توجه به هدف طراحی که صفر کردن خطای ماندگار خروجی‌ها است، لازم است یک انتگرال گیر کمکی وارد مدل سیستم گردد.

با اعمال عملگر تفاضل‌گیر به معادله‌ی (4) خواهیم داشت:

$$\underbrace{x_m(k+1) - x_m(k)}_{\Delta x_m(k+1)} = A_m \underbrace{(x_m(k) - x_m(k-1))}_{\Delta x_m(k)} + B_m \underbrace{(u(k) - u(k-1))}_{\Delta u(k)} \quad (5)$$

برای مرتبط کردن  $\Delta x_m(k)$  با  $y(k)$  بردار حالت جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)^T]^T \quad (6)$$

که  $T$  نشان دهنده‌ی ماتریس ترانزپوز است.

تفاضل معادله‌ی خروجی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= C_m (x_m(k+1) - x_m(k)) \\ &= C_m \Delta x_m(k+1) \\ &= C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) \end{aligned} \quad (7)$$

با ترکیب معادلات (6) و (7) خواهیم داشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}_{x(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}_B \Delta u(k) \quad (8)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} o_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}_{x(k)}$$

به طوری‌که  $I_{q \times q}$  یک ماتریس یکه با ابعاد  $q \times q$  بوده و  $o_m$  یک ماتریس صفر با ابعاد  $q \times n'$  را نشان می‌دهد. همچنین  $A$ ،  $B$  و  $C$  ماتریس‌هایی هستند که در ادامه برای توصیف سیستم جدید حاصل، از آن‌ها استفاده می‌شود. اکنون می‌توان دریافت که بعد مدل ترکیب شده‌ی جدید به صورت  $n = n' + q$  به دست می‌آید.

جهت به دست آوردن کنترل پیش‌بین برای سیستم به دست آمده در فوق ابتدا دو بردار به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

همچنین  $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$  نرخ تغییرات این زوایا را معرفی می‌کنند. بردار  $u = [T_x \ T_y \ T_z]^T$  بردار ورودی را معرفی کرده و شامل گشتاورهای ورودی حول محورهای معرفی شده می‌باشد.  $\omega_0$  نیز نشان دهنده‌ی فرکانس چرخش<sup>۱</sup> است.

بردار حالت سیستم به صورت  $P = [\theta \ \phi \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi} \ \dot{\psi}]^T$  تعریف می‌گردد. در نتیجه معادلات دینامیکی مرتب شده‌ی ماهواره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= - \underbrace{\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}^{-1}}_I \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\omega_0 I_{zy} & \omega_0(I_y - I_x - I_z) \\ 0 & 0 & 2I_{xy}\omega_0 \\ (I_x - I_y - I_z)\omega_0 & -2\omega_0 I_{xy} & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right. \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -4\omega_0^2(I_z - I_y) & 0 & -I_{xz}\omega_0^2 \\ -I_{xy}\omega_0^2 & 3\omega_0^2(I_z - I_x) & I_{yz}[\omega_0^2] \\ I_{xz}\omega_0^2 & 0 & (I_y - I_x)\omega_0 \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \left. \right) \end{aligned} \quad (9)$$

در نتیجه اگر تعریف کنیم  $M = [-I^{-1}M_2 \ -I^{-1}M_1]$  می‌توان

معادلات نهایی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

### ۳. الگوریتم کنترل پیش‌بین

در این بخش به معرفی بیان ریاضی کنترل پیش‌بین و نحوه به دست آوردن معادلات حاکم بر آن پرداخته می‌شود. نکته‌ی قابل تذکر این‌که ایده‌ی استفاده از توابع لاگر در طراحی کنترل پیش‌بین اولین بار توسط ونگ<sup>۲</sup> در [۲] و [۱۰-۱۱] معرفی شده است.

#### ۳.۱. فرمول بندی کلی کنترل پیش‌بین

فرض کنید سیستمی دارای  $m$  ورودی و  $q$  خروجی بوده و تعداد حالت‌های آن برابر  $n'$  باشد. هدف آن است که بتوان خطای حالت ماندگار هر یک از خروجی‌های قابل اندازه‌گیری را به صفر رساند.

<sup>1</sup> Orbital frequency

<sup>2</sup> L. Wang

پاسخ بهینه یک دنباله از ورودی‌هاست اما همان‌طور که قبلاً اشاره شد تنها المان اول از این دنباله به سیستم اعمال می‌گردد. بنابراین:

$$\Delta U = \underbrace{\begin{bmatrix} I_m & 0_m & \cdots & 0_m \end{bmatrix}}_{N_u} (\Phi^T \Phi + R)^{-1} (\Phi^T R_s - \Phi^T Fx(k)) \quad (16)$$

$$= K_u r(k) - K_{mpc} x(k)$$

۳.۲. کنترل پیش‌بین همراه با قیود

برای اصلاح پاسخ بهینه‌ی به دست آمده از کنترل پیش‌بین جهت برخورد با قیود موجود در سیستم باید کنترل پیش‌بین به صورت جدیدی فرموله‌سازی شود. در اینجا فرض بر آن است که قیود موجود در سیستم به فرم نامساوی‌های خطی از متغیرهای سیستم هستند.

قیود روی نرخ تغییرات ورودی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{\min} &\leq \Delta u_1(k) \leq \Delta u_1^{\max} \\ \Delta u_2^{\min} &\leq \Delta u_2(k) \leq \Delta u_2^{\max} \\ &\vdots \\ \Delta u_m^{\min} &\leq \Delta u_m(k) \leq \Delta u_m^{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

به صورت مشابه قیود روی ورودی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1^{\min} &\leq u_1(k) \leq u_1^{\max} \\ u_2^{\min} &\leq u_2(k) \leq u_2^{\max} \\ &\vdots \\ u_m^{\min} &\leq u_m(k) \leq u_m^{\max} \end{aligned} \quad (18)$$

برای تبدیل این قیود به فرم نامساوی‌هایی خطی آن‌ها را به صورت قیودی روی نرخ تغییرات ورودی  $\Delta U$  پارامتری می‌کنیم. برای این کار قیود روی نرخ تغییرات ورودی به صورت ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -\Delta U^{\min} \\ \Delta U^{\max} \end{bmatrix} \quad (19)$$

با اعمال همین روند بر روی قیود روی ورودی برای همه‌ی نمونه‌های آینده خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \begin{bmatrix} \Delta u(k)^T & \Delta u(k+1)^T & \cdots & \Delta u(k+N_u-1)^T \end{bmatrix}^T \\ Y &= \begin{bmatrix} y(k|k)^T & y(k+2|k)^T & \cdots & y(k+N_p|k)^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (9)$$

به طوری که  $y(k+i|k)$  نشان دهنده‌ی خروجی در لحظه‌ی زمانی  $k+i$  بر اساس حالت در لحظه‌ی زمانی  $k$  یعنی  $x(k)$  است.

بر اساس مدل فضای حالت جدید به دست آمده بردار متغیر خروجی به فرم ماتریسی زیر نشان داده می‌شود:

$$Y = Fx(k) + \Phi \Delta U \quad (10)$$

به طوری که:

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \cdots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \cdots & CA^{N_p-N_u}B \end{bmatrix} \quad (11)$$

هدف کنترل پیش‌بین آن است که خروجی پیش‌بین شده در لحظه‌ی زمانی  $k+i$  بر اساس مدل را تا حد ممکن به مقدار مرجع از پیش تعیین شده برساند. فرض کنید که بردار خروجی مرجع به صورت زیر باشد:

$$R_s^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{N_p} r(k) \quad (12)$$

و تابع هزینه به صورت زیر است:

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T R \Delta U \quad (13)$$

به طوری که بخش اول این تابع هزینه برای کمینه‌سازی خطا بین خروجی پیش‌بینی شده و مقدار مرجع است و بخش دوم برای کمینه سازی حداکثر تلاش در این مسیر می‌باشد. همچنین  $R$  ماتریس وزن روی ورودی است که یک ماتریس قطری می‌باشد.

برای یافتن ورودی کنترلی بهینه برای کمینه سازی  $J$ ، با قرار دادن معادله‌ی (۱۰) در (۱۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} J &= (R_s - Fx(k))^T (R_s - Fx(k)) \\ &\quad - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - Fx(k)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + R) \Delta U \end{aligned} \quad (14)$$

با تفاضل گیری از معادله‌ی (۱۴) و برابر صفر قرار دادن آن به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k)) \quad (15)$$

برای حل این مسئله در ابتدا شرایط KKT معرفی می‌شود تا با استفاده از آن بتوان قیود را به فرم ضرایب لاگرانژین<sup>۱</sup> وارد مسئله کرد. این شرایط لازم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} Ex + F + M^T \lambda = 0, \quad Mx - \gamma \leq 0 \\ \lambda^T (Mx - \gamma) = 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $\lambda$  بردار ضرایب لاگرانژین خوانده می‌شود. برای یک قید فعال ضریب لاگرانژین متناظر با آن مثبت است و برای یک قید غیرفعال این ضریب صفر است. واضح است که اگر رابطه‌ی  $Mx - \gamma = 0$  برقرار باشد آن‌گاه معادله‌ی (۲۳) و (۲۴) یکسان هستند.

برنامه ریزی مربعی هیلدرث یک الگوریتم ساده برای حل مسائل برنامه‌ریزی مربعی است. عبارت تکرار شونده‌ی این روش به صورت زیر است:

$$\lambda_i^{m+1} = \max(0, \omega_i^{m+1}) \quad (25)$$

که در آن:

$$\omega_i^{m+1} = -\frac{1}{h_{ij}} \left[ k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} \lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \lambda_j^{m+1} \right] \quad (26)$$

به طوری که  $h_{ij}$  یک اسکالر بوده [آمین المان از ماتریس  $H = ME^{-1}M^T$  است. همچنین  $k_i$ ، آمین المان از بردار  $K = \gamma + ME^{-1}F$  می‌باشد. اگر  $\lambda^*$  را بردار همگرا شونده‌ای در نظر بگیریم که شامل مقادیر صفر یا مثبت از ضرایب لاگرانژین است آن‌گاه خواهیم داشت:

$$x = -E^{-1}(M^T \lambda^* + F) \quad (27)$$

بردار همگرا شده  $\lambda$  را  $\lambda_{act}^*$  می‌نامیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{act}^* = -(M_{active} E^{-1} M_{active}^T)^{-1} (\gamma_{active} + M_{active} E^{-1} F) \quad (28)$$

که ماتریس  $M_{active}$  شامل داده‌های قیود بوده و  $\gamma_{active}$  برداری است که از حذف سطرها صفر در بردار  $\lambda^*$  به دست می‌آید.

۳.۴. فرمول بندی دوباره‌ی کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لاگر  
برای فرمول بندی دوباره‌ی کنترل پیش‌بین و ساده‌سازی پاسخ آن از توابع لاگر جهت بیان مسئله‌ی اصلی استفاده می‌کنیم. علاوه بر این با استفاده از این توابع می‌توان پارامترهای زیادی که در افق‌های پیش‌بینی طولانی وجود دارد را با تعداد کمتری پارامتر جایگزین نمود.

$$\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ u(k+2|k) \\ \vdots \\ u(k+N_c-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} u(k-1|k) \quad (20)$$

$$+ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & \dots & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \Delta u(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1|k) \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} -(C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U) \leq -U^{\max} \\ (C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U) \leq U^{\max} \end{aligned} \quad (21)$$

و  $U^{\min}, U^{\max}, \Delta U^{\min}, \Delta U^{\max}$  به ترتیب نشان دهنده‌ی بردارهای ستونی با  $N_u$  المان از  $u^{\min}, u^{\max}, \Delta u^{\min}, \Delta u^{\max}$  می‌باشند. اکنون برای ساده‌سازی بیشتر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} M_1 = \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}; N_1 = \begin{bmatrix} -U^{\min} + C_1 u(k-1) \\ U^{\max} - C_1 u(k-1) \end{bmatrix}; \\ M_2 = \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} -\Delta U^{\min} \\ \Delta U^{\max} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow MU \leq \gamma \end{aligned} \quad (22)$$

### ۳.۳. حل عددی برای کنترل پیش‌بین

برای معرفی یک پاسخ عددی در ابتدا به معرفی برنامه‌ریزی مربعی پرداخته می‌شود. فرض کنید  $x$  متغیر تصمیم‌گیری بوده و ماتریس  $E$  یک ماتریس متقارن و مثبت معین است. تابع هزینه و قیود به فرم زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{aligned} J = x^T E x + x^T F \\ Mx \leq \gamma \end{aligned} \quad (23)$$

در این مسئله قیود به فرم نامساوی هستند. این نوع قیود می‌تواند به دو دسته تقسیم شود. اگر یکی از آن‌ها به تساوی تبدیل گردد آن را فعال می‌نامیم. در غیر این صورت قید غیر فعال است. دقت کنید که برای داشتن یک پاسخ بهینه در این مسئله، تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری باید بیشتر یا برابر با تعداد قیود فعال باشد.

<sup>1</sup> Lagrangian multipliers

توابع لاگر یک مجموعه از توابع گسسته با پایه‌ی متعامد هستند که تبدیل  $z$  آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma_N(z) = \Gamma_{N+1}(z) \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (29)$$

به طوری که:

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \quad (30)$$

در این تبدیل  $a$  قطب شبکه است و برای اینکه این شبکه پایدار باشد باید  $0 \leq a < 1$ .

اگر معکوس تبدیل  $z$  تابع  $\Gamma_N(z, a)$  را با  $I_N(k)$  نشان دهیم، قرار می‌دهیم:

$$L(k) = [I_1(k) \ I_2(k) \ \dots \ I_N(k)]^T \quad (31)$$

این مجموعه معادله‌ی دیفرانسیل زیر را برآورده می‌کند:

$$L(k+1) = A_l L(k) \quad (32)$$

که در آن شرایط اولیه به صورت زیر داده شده است:

$$L(0)^T = \sqrt{\beta} [1-a^2 \ a^2-a^3 \ \dots \ (-1)^{N-1} a^{N-1}] \quad (33)$$

و ماتریس  $A_l$  یک ماتریس  $N \times N$  است. به طور مثال برای  $N=5$

این ماتریس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_l = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha^2\beta & -\alpha\beta & \beta & \alpha & 0 \\ -\alpha^3\beta & \alpha^2\beta & -\alpha\beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (34)$$

می‌توان پاسخ ضربه‌ی یک سیستم پایدار را با استفاده از توابع لاگر توضیح داد. در یک سیستم چند ورودی-چند خروجی که سیگنال ورودی می‌تواند به صورت  $\Delta u = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \dots \ \Delta u_m]^T$  بیان شود، هر ورودی به صورت مستقل یک مکان برای قطب لاگر دارد.

می‌توان ماتریس ورودی  $B$  را به صورت زیر نوشت:

$$B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m] \quad (35)$$

اکنون می‌توان هر سیگنال کنترل ورودی را به صورت پاسخ ضربه‌ی یک سیستم پایدار نوشت آن‌گاه آن را می‌توان به صورت زیر توضیح داد:

$$\Delta u_i(k) = L_i(k)^T \eta_i \quad (36)$$

$$\Delta u(k+m) = \begin{bmatrix} L_1(m)^T & o_2^T & \dots & o_m^T \\ o_1^T & L_2(m)^T & \dots & o_m^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_1^T & o_2^T & \dots & L_m(m)^T \end{bmatrix} \eta \quad (37)$$

که در آن  $m$  نشان دهنده‌ی لحظه‌ی زمانی آینده بوده و  $O_k$  بردار صفر است. اکنون واضح است که با استفاده از توابع لاگر قیود به فرم  $M\eta \leq \gamma$  در می‌آیند.

پیش‌بینی حالت‌های آینده در لحظه‌ی  $m$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$x(k+m|k) = A^m x(k) + \phi(m)^T \eta \quad (38)$$

به طوری که:

$$\phi(m)^T = \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1} [B_1 L_1(j)^T \ B_2 L_2(j)^T \ \dots \ B_m L_m(j)^T] \eta \quad (39)$$

که در آن  $\eta^T = [\eta_1^T \ \eta_2^T \ \dots \ \eta_m^T]$  بردار پارامتر است.

با توصیف تابع هزینه با استفاده از توابع لاگر می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$J = \eta^T \Omega \eta + 2\eta^T \Psi x(k) + \sum_{m=1}^{N_p} x(k)^T (A^T)^m Q A^m x(k) \quad (40)$$

که در آن ماتریس‌های  $\Omega$  و  $\Psi$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Omega = \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q \phi(m)^T + R_L \quad (41)$$

$$\Psi = \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q A^m$$

و ماتریس‌های  $R_L$  و  $Q$  ماتریس‌های وزنی هستند. برای تبدیل حالت‌ها به خروجی در توصیف تابع هزینه کافیسیت قرار دهیم  $Q = C^T C$ .

#### ۴. نتایج شبیه‌سازی

برای شبیه‌سازی از پارامترهای مدل که در جدول ۱ آمده است استفاده می‌شود. این پارامترها از مرجع [۱۲] گرفته شده‌اند.

جدول ۱: پارامترهای ماهواره

|            |        |
|------------|--------|
| $I_x$      | ۱۰/۴۱  |
| $I_y$      | ۱۰/۷۹  |
| $I_z$      | ۶/۵۱   |
| $I_{xy}$   | ۰/۶۵   |
| $I_{xz}$   | ۰/۰۰   |
| $I_{yz}$   | ۰/۰۰   |
| $\omega_0$ | ۰/۰۰۱۱ |

برای اعمال کنترل پیش‌بین که از توابع لاگر استفاده می‌کند از پارامترهای آمده در [۱۳] استفاده خواهد شد.

الگوریتم کنترل پیش‌بین به سیستم گسسته اعمال خواهد شد بنابراین ابتدا با استفاده از زمان نمونه برداری  $T_s=0.1s$  معادلات دینامیکی معرفی شده برای ماهواره گسسته سازی می‌شوند. معادلات در مسیر نامی ماهواره مقداردهی اولیه می‌گردند، یعنی

$$[\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

دامنه‌ی ورودی کنترلی با قید موجود در سیستم پیش‌رانس به صورت زیر محدود می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_{\min} &= [-0.01 \ -0.01 \ -0.01](Nm) \\ u_{\max} &= [0.01 \ 0.01 \ 0.01](Nm) \\ \Delta u_{\min} &= [-0.001 \ -0.001 \ -0.001](Nm/s) \\ \Delta u_{\max} &= [0.001 \ 0.001 \ 0.001](Nm/s) \end{aligned} \quad (42)$$

برای کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لاگر پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$N_p = 20; N = [10, 10, 10]; N_u = 10 \quad (43)$$

که در آن  $N_p$  افق پیش‌بینی بوده و  $N$  تعداد توابع لاگر است.  $N_u$  نیز نشان دهنده‌ی افق کنترل در کنترل پیش‌بین است.

قطب‌های شبکه‌ی لاگر به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$a = [0.8, 0.8, 0.8] \quad (44)$$

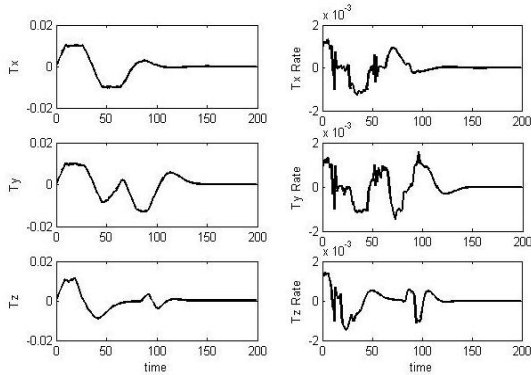
و ماتریس وزن برای سیگنال ورودی به صورت زیر است:

$$R = [0.1, 0.1, 0.1]^T \quad (45)$$

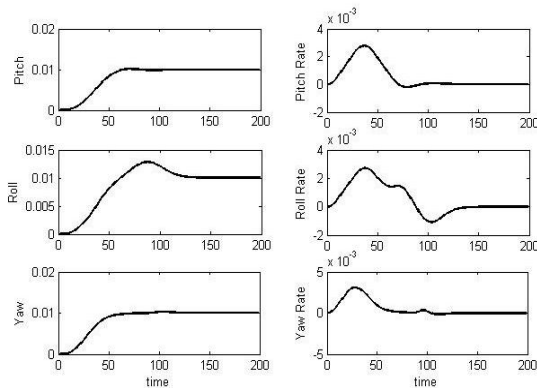
مسئله‌ی کنترل پیش‌بین معمولی به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} \quad & J = \sum_{i=1}^{N_p} \|r - y(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=1}^{N_u-1} \|u(k+i|k)\|_R^2 \\ \text{subject to} \quad & x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k=1, \dots, N_p \\ & u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad k=1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max}, \quad k=1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (46)$$

برای حل این مسئله از Yalmip و حل‌کننده‌ی SeDuMi استفاده خواهد شد. این جعبه ابزار و حل‌کننده برای حل مسائل بهینه‌سازی محدب به کار می‌روند. همان‌طور که از تابع هزینه و قیود موجود در مسئله‌ی (۴۶) مشخص است، این مسئله نیز محدب می‌باشد. در این مسئله هدف آن است که ماهواره طوری کنترل شود که هر موقعیت زاویه‌ی آن به مقدار  $0.1$  برسد و نرخ تغییرات این زوایا صفر شود. با اعمال کنترل‌کننده‌ی طراحی شده خواهیم داشت:



شکل ۱- سیگنال ورودی (گشتاورها) و نرخ تغییرات آن برای مرجع پله با مقدار  $0.1$



شکل ۲- سیگنال خروجی (زوایای موقعیت و نرخ تغییرات آنها) برای مرجع پله با مقدار  $0.1$

توابع لاگر استفاده می‌کند کمتر از  $1/465$  ثانیه بود. بنابراین در این مقاله به هدف کاهش زمان محاسبات کنترل‌کننده نیز رسیده‌ایم.

### ۵. نتیجه‌گیری

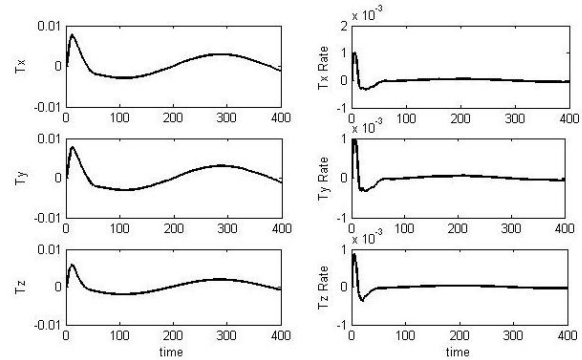
در این مقاله به مسئله‌ی ساده سازی الگوریتم کنترل پیش‌بین پرداخته شده است. برای این ساده سازی از توابع لاگر استفاده شد که نشان داده شد با استفاده از این توابع بار محاسباتی کنترل پیش‌بین که یکی از موانع پیاده سازی عملی این کنترل‌کننده است حل می‌شود. همچنین نتایج شبیه سازی آورده شد و نشان داده شد که با اعمال این کنترل‌کننده روی یک ماهواره این کنترل‌کننده به طور موفقیت آمیزی علاوه بر برآوردن قیود موجود در مسئله توانسته است به مقدار مطلوب برای خروجی‌ها هم دست یابد. در نهایت مقایسه‌ای بین زمان‌های کنترل پیش‌بین معمولی و با استفاده از توابع لاگر انجام گرفت و نشان داده شد که زمان کنترل پیش‌بین معمولی بسیار بیشتر از کنترل پیش‌بینی است که از توابع لاگر استفاده می‌کند.

### مراجع

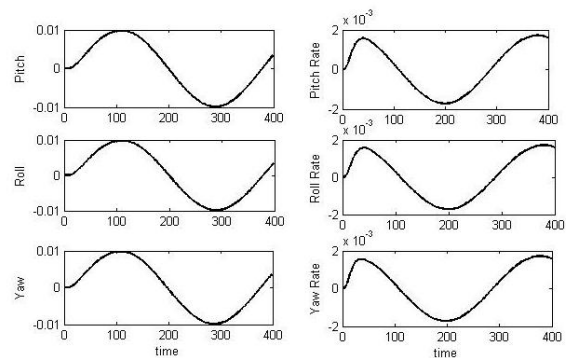
- [1]. S. J. Qina and T. A. Badgwell, "A survey of industrial model predictive control technology," *Control Engineering Practice*, vol. 11, pp. 733-764, 2003.
- [2]. L. Wang, "Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB," ed: Springer, 2009.
- [3]. J. M. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*: Prentice Hall, 2000.
- [4]. M. Haeri and H. Z. Beik, "Extension of Nonlinear DMC for MIMO Systems," presented at the International Conference on Control and Automation (ICCA'03) Montreal, Canada, 2003.
- [5]. R. Scattolini, "Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control – A review," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 723–731, 2009.
- [6]. X. Chen and X. Wu, "Design and Implementation of Model Predictive Control Algorithms for Small Satellite Three-Axis Stabilization," presented at the International Conference on Information and Automation, Shenzhen, China, 2011.
- [7]. A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos, "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 3-20, 2002.
- [8]. P. Tøndel, T. A. Johansen, and A. Bemporad, "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MFC solutions," presented at the IEEE Conference on Decision and Control, 2001.
- [9]. Y. Wang and S. Boyd, "Fast Model Predictive Control Using Online Optimization," *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, vol. 18, pp. 267 - 278, 2010.
- [10]. L. Wang, "Discrete time model predictive control design using Laguerre functions," presented at the American Control Conference, 2001.
- [11]. L. Wang, "Discrete model predictive controller design using Laguerre functions," *Journal of Process Control*, vol. 14, pp. 131-142, 2004.
- [12]. M. J.Sidi, *Spacecraft dynamics and control*: Cambridge, 1997.

همان‌طور که مشخص است مقدار بهینه برای هر یک از خروجی‌ها به دست آمده است و قیود روی سیگنال ورودی و نرخ تغییرات آن‌ها جز در چند نقطه‌ی محدود بر آورده شده است.

برای یک مرجع سینوسی با دامنه‌ی  $0/01$  برای هر زاویه‌ی خروجی نتایج به صورت زیر است:



شکل ۳ - سیگنال ورودی (گشتاورها) و نرخ تغییرات آن برای مرجع سینوسی



شکل ۴ - سیگنال خروجی (زاویه‌ی موقعیت و نرخ تغییرات آن‌ها) برای مرجع

سینوسی

همان‌طور که از نتایج برمی‌آید برای مرجع سینوسی نیز مقدار بهینه به دست آمده است. و قیود موجود روی سیگنال کنترل و نرخ تغییرات آن برآورده شده است. در نتیجه توانسته‌ایم ماهواره را با اعمال کنترل پیش‌بین طراحی شده به خوبی کنترل کنیم.

همه‌ی شبیه سازی‌های انجام شده با استفاده از نرم افزار Matlab و با استفاده از یک لپ تاپ با هسته‌ی دوگانه و پردازنده‌ی با فرکانس ۲/۵۳ GHz و حافظه‌ی RAM به اندازه‌ی ۴ GB به دست آمده است.

پس از اندازه گیری زمان‌های استفاده شده توسط پردازنده برای هر یک از دو کنترل‌کننده‌ی پیش‌بین معمولی و با استفاده از توابع لاگر، زمان محاسبات کنترل پیش‌بین معمولی بیش از  $653/1665$  ثانیه به طول انجامید این در حالی است که زمان محاسبات برای کنترل پیش‌بین که از



presented at the IEEE International Conference on Computer Science and Information Technology (ICCSIT), 2010.

[13]. L. Ji, J. Xiang, and K. Liu, "Model Predictive Technics Based Three-axis Stabilization Control of a Drag-free Satellite,"

