

## کنترل ماهواره با رویکرد کنترل پیش‌بین و با استفاده از توابع لاغر

شکوفه جعفری فشارکی<sup>\*</sup> <sup>\*\*</sup> فرزاد توحید خواه <sup>\*\*</sup> حیدرعلی طالبی

<sup>\*</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

<sup>\*\*</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

<sup>\*\*\*</sup> استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۶/۱۰

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۳/۲۰

### چکیده

در این مقاله یک کنترل‌کننده بر اساس کنترل پیش‌بینی جهت هدایت و کنترل ماهواره پیشنهاد شده است. امروزه کنترل کننده‌ی پیش‌بینی یک روش عملی شناخته شده جهت کنترل سیستم‌های مختلف در صنعت به شمار می‌رود. یکی از چالش‌های موجود بر سر راه اعمال عملی این نوع کنترل کننده‌ها باز محاسباتی آنها و زمان بر بودن عملیات کنترلی آن در هر گام زمانی می‌باشد. در این پژوهش برای کاهش باز محاسباتی کنترل کننده‌ی پیش‌بین استفاده از توابع لاغر پیشنهاد شده است. برای نشان دادن امکان پذیری و اعتبار کنترل کننده‌ی طراحی شده، نتایج شبیه سازی حاصل از اعمال آن روی یک مدل از ماهواره آورده شده است. همچنین مقایسه‌ای بین زمان محاسبات کنترل کننده با استفاده از توابع لاغر و در غیاب آنها انجام گرفته است.

کلید واژگان: ماهواره، کنترل پیش‌بین، توابع لاغر.

### ۱. مقدمه

کنترل پیش‌بین<sup>۱</sup> به دسته‌ای از الگوریتم‌های کامپیوتری کنترل اطلاق می‌شود که از مدل سیستم به صورت مستقیم برای پیش‌بینی پاسخ آینده‌ی آن استفاده می‌کنند. در هر بازه زمانی الگوریتم کنترل کننده پیش‌بین سعی بر آن دارد که با محاسبه‌ی یک دنباله از متغیرهای کنترلی رفتار آینده‌ی سیستم را بهینه سازی نماید. اولین المان از این توالی ورودی کنترلی بهینه شده به سیستم اعمال می‌گردد و در بازه زمانی بعدی برای به دست آوردن ورودی کنترلی جدید، محاسبات دوباره تکرار می‌گردد [۱].

معمولًا مدلی که برای طراحی کنترل پیش‌بین استفاده می‌شود مدل فضای حالت<sup>۲</sup> است که اطلاعات مورد نیاز در هر گام کنترلی جهت پیش‌بینی آینده با استفاده از حالت‌های کنونی سیستم به دست می‌آیند. [۲]

تنها روش کنترل پیشرفته طراحی شده که تأثیر قابل توجهی در مهندسی کنترل صنعتی داشته است، کنترل پیش‌بین می‌باشد [۳]. تجربه‌های عملی و تئوری زیادی بیان‌گر آن بوده است که کنترل کننده‌ی پیش‌بین عملکرد خوبی برای دسته‌ی وسیعی از سیستم‌ها داشته است. یکی از ویژگی‌های اصلی کنترل کننده‌ی پیش‌بین که آن را به ویژه در صنعت محبوب کرده است توانایی برخورد مستقیم این کنترل کننده با قیود سخت موجود در سیستم می‌باشد. علاوه بر این کنترل کننده با پیش‌بین به سادگی قابل تعیین برای سیستم‌های چند متغیره، تاخیردار و غیر حداقل فاز است [۲] و [۴-۵].

تمام این‌ها در حالی است که یکی از مهم‌ترین چالش‌هایی که بر سر راه پیاده‌سازی عملی کنترل پیش‌بین وجود دارد و اعمال آن را محدود کرده است بار محاسباتی روی خط این کنترل کننده می‌باشد [۲] و [۶]. در نتیجه در سیستم‌هایی که زمان نمونه‌برداری آنها بسیار کوچک باشد و یا دینامیک سیستم پیچیده باشد کنترل کننده‌ی پیش‌بین در هر گام زمانی با تعداد زیادی متغیر تصمیم‌گیری رو به رو خواهد بود و همین باعث کاهش سرعت اجرای بلادرنگ این کنترل کننده می‌باشد.

یکی از روش‌هایی که برای کاهش بار محاسباتی کنترل کننده

<sup>1</sup> Model Predictive Control(MPC)

<sup>2</sup> State Space model

تا بار محاسباتی کنترل کننده‌ی پیش‌بین طراحی شده کاهش یابد. همچنین برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی مربوطی موجود در کنترل پیش‌بین از برنامه ریزی مربوطی هیلدرث<sup>۴</sup> استفاده خواهد شد. در ادامه برای مقایسه‌ی زمان محاسبات کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لagger و کنترل پیش‌بین معمولی، کنترل پیش‌بین طراحی شده بدون استفاده از توابع لagger نیز جهت کنترل ماهواره اعمال می‌شود و زمان انجام محاسبات برای هر دو روش اندازه گیری خواهد شد. همان‌طور که انتظار می‌رود کنترل پیش‌بین معمولی زمانی بسیار بیشتر از کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لagger نیاز دارد.

در ادامه مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش دوم دینامیک ماهواره که برای آن کنترل پیش‌بین طراحی می‌شود معرفی خواهد شد. در بخش سوم به فرمول‌بندی کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لagger و روش برنامه‌ریزی مربوطی هیلدرث به طور مختصر پرداخته خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی حاصل از اعمال کنترل کننده‌ی طراحی شده (با استفاده از توابع لagger) و کنترل پیش‌بین معمولی و مقایسه‌ی انجام شده بین این دو در بخش چهارم آورده شده است. در پایان در بخش پنجم نتیجه گیری حاصل از مقاله ارائه خواهد شد.

## ۲. مدل‌سازی ماهواره

برای به دست آوردن معادلات دینامیکی حاکم بر ماهواره در ابتدا به معرفی دستگاه مختصاتی که معادلات در آن تعریف می‌گردد پرداخته می‌شود. در این دستگاه مختصات محور Z نشان دهنده‌ی جهت حرکت، محور X نشان دهنده‌ی صفحه‌ی چرخش و محور Y بردار نرمال صفحه‌ی چرخش است و این سه محور یک دستگاه مختصات راست‌گرد متعامد را جهت معرفی دینامیک ماهواره نشان می‌دهند.

معادلان خطی شده‌ی یک ماهواره حول مبدأ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} T_x &= -4\omega_o^2(I_z - I_y)\varphi - I_{xz}\omega_o^2\psi + 2\omega_oI_{zy}\dot{\theta} \\ &\quad + \omega_o(I_y - I_x - I_z)\dot{\psi} + I_x\ddot{\varphi} - I_{xy}\ddot{\theta} - I_{xz}\ddot{\psi} \\ T_y &= I_z\ddot{\theta} - I_{xy}\ddot{\varphi} - I_{yz}\ddot{\psi} - 3\omega_o^2(I_z - I_x)\theta \\ &\quad - I_{xy}\omega_o^2\varphi + I_{yz}\left[\omega_o^2\right]\psi + 2I_{xy}\omega_o\dot{\psi} \\ T_z &= I_z\ddot{\psi} - I_{xz}\ddot{\varphi} - I_{yz}\ddot{\theta} + I_{xz}\omega_o^2\varphi + (I_y - I_x)\omega_o^2\psi \\ &\quad + (I_x - I_y - I_z)\omega_o\dot{\varphi} - 2\omega_oI_{xy}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\vartheta, \varphi, \psi$  به ترتیب نشان دهنده‌ی زاویه‌ی چرخش<sup>۵</sup>، جهش<sup>۶</sup> و غلتش<sup>۷</sup> است و زوایای حرکت ماهواره را نشان می‌دهند.

پیش‌بین استفاده می‌شود آن است که سیگنال کنترل به صورت تابعی از شرایط اولیه به صورت خارج از خط محاسبه شده و در یک جدول مراجعته‌ای قرار می‌گیرد تا کنترل کننده به صورت روی خط با توجه به شرایط اولیه سیستم به این جدول مراجعة نموده و ورودی کنترلی را برای سیستم محاسبه کند [۷]-[۸]. این روش توانسته است در سیستم‌های کوچک سرعت را تا ۱۰۰ برابر افزایش دهد [۹] اما در این روش با افزایش پارامترهایی چون افق پیش‌بینی، کنترل، تعداد حالت‌ها و ورودی‌ها تعداد المان‌های این جدول به صورت نمایی افزایش می‌یابد. بنابراین در سیستم‌های بزرگ اجرای این روش عملی نیست.

یکی از رویکردهای بسیار مناسب برای کاهش بار محاسباتی این کنترل کننده استفاده از توابع لagger در طراحی آن می‌باشد. با پارامتری کردن دنباله سیگنال کنترل می‌توان به طور موثری تعداد قیود موجود در افق پیش‌بینی و در نتیجه تعداد پارامترهایی که در هر گام کنترل کننده با آن سر و کار دارد را کاهش داد و بار محاسباتی این کنترل کننده برای سیستم‌های با ابعاد وسیع و یا دینامیک سریع را کم کرد.

علاوه بر این یک عامل کاهشی نمایی در توابع لagger وجود دارد که تضمین کننده‌ی همگرایی تفاضل سیگنال کنترل به سمت صفر، بعد از یک مدت زمان گذرا می‌باشد. بنابراین در بیشتر موارد می‌توان قیود را تنها در این دوره‌ی گذرا از پاسخ اعمال نمود و در نتیجه تعداد قیود موجود در مسئله‌ی کنترل پیش‌بین را نیز کاهش داد [۲].

بنابر یک تعریف کلی، ماهواره<sup>۸</sup> به دستگاه‌های ساخت بشر گفته می‌شود که در مدارهایی در فضا به گرد زمین یا سیارات دیگر می‌چرخد. ماهواره‌ها برای اهداف مختلفی استفاده می‌شوند. اهمیت آن‌ها برای مخابرات و بررسی منابع زمینی و پژوهش و کاربردهای نظامی و جاسوسی روزافزون است. معمولاً یک ماهواره دارای سیستمی نیمه خودکار و کنترل شده توسط کامپیوتر می‌باشد.

علاوه بر تمام این موارد، سیستم ماهواره یک سیستم چند متغیره<sup>۹</sup> بوده و نیازمند کنترل بلاذرنگ است و قیود زیادی مانند قیود روی سیگنال ورودی، نرخ تغییرات سیگنال ورودی و سیگنال خروجی در سیستم آن وجود دارد. بنابراین کنترل پیش‌بین می‌تواند انتخاب مناسبی برای کنترل و یا پایدارسازی سیستم یک ماهواره باشد.

در این مقاله هدف طراحی یک کنترل کننده‌ی پیش‌بین برای کنترل یک ماهواره است به طوری که ماهواره بتواند یک مسیر از پیش مشخص را دنبال کند. در طراحی این کنترل کننده از توابع لagger<sup>۱۰</sup> استفاده می‌شود

<sup>4</sup> Hildreth's quadratic programming

<sup>5</sup> Yaw

<sup>6</sup> Pitch

<sup>7</sup> Roll

<sup>1</sup> Satellite

<sup>2</sup> Multi input-Multi output(MIMO)

<sup>3</sup> Laguerre functions

همچنین فرض بر آن است که تعداد خروجی‌های سیستم کمتر یا برابر با تعداد ورودی‌هاست ( $q \leq m$ ).

سیستم با معادلات گسسته‌ی فضایی حالت زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y(k) &= C_m x_m(k) \end{aligned} \quad (4)$$

به طوری که  $u$  بردار ورودی کنترلی،  $y$  بردار خروجی سیستم و  $x_m$  بردار حالت سیستم را نشان می‌دهد. برای تغییر مدل با توجه به هدف طراحی که صفر کردن خطای ماندگار خروجی‌ها است، لازم است یک انتگرال گیر کمکی وارد مدل سیستم گردد.

با اعمال عملگر تفاضل گیر به معادله (4) خواهیم داشت:

$$\underbrace{x_m(k+1) - x_m(k)}_{\Delta x_m(k+1)} = \underbrace{A_m(x_m(k) - x_m(k-1))}_{\Delta x_m(k)} + \underbrace{B_m(u(k) - u(k-1))}_{\Delta u(k)} \quad (5)$$

برای مرتب کردن (5) با  $y(k)$  بردار حالت جدید به صورت

زیر تعریف می‌کیم:

$$x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)]^T \quad (6)$$

که  $x^T$  نشان دهنده ماتریس ترانهاده است.

تفاضل معادله خروجی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= C_m(x_m(k+1) - x_m(k)) \\ &= C_m \Delta x_m(k+1) \\ &= C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) \end{aligned} \quad (7)$$

با ترکیب معادلات (6) و (7) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & O_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (8)$$

به طوری که  $I_{q \times q}$  یک ماتریس یکه با ابعاد  $q \times q$  بوده و  $O_m$  یک ماتریس صفر با ابعاد  $n' \times n'$  را نشان می‌دهد. همچنین  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی هستند که در ادامه برای توصیف سیستم جدید حاصل، از آن‌ها استفاده می‌شود. اکنون می‌توان دریافت که بعد مدل ترکیب شده‌ی جدید به صورت  $n' = n + q$  به دست می‌آید.

جهت به دست آوردن کنترل پیش‌بین برای سیستم به دست آمده در فوق ابتدا دو بردار به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

همچنین  $\dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}$  نرخ تغییرات این زوایا را معرفی می‌کنند. بردار  $u = [T_x \ T_y \ T_z]^T$  بردار ورودی را معرفی کرده و شامل گشتاورهای ورودی حول محورهای معرفی شده می‌باشد.  $\omega_0$  نیز نشان دهنده فرکانس چرخش<sup>۱</sup> است.

بردار حالت سیستم به صورت  $P = [\theta \ \varphi \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi}]^T$  تعریف می‌گردد. در نتیجه معادلات دینامیکی مرتب شده‌ی ماهواره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}}_I^{-1} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\omega_o I_{zy} & \omega_o(I_y - I_x - I_z) \\ 0 & 0 & 2I_{xy}\omega_o \\ (I_x - I_y - I_z)\omega_o & -2\omega_o I_{xy} & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} \right) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4\omega_o^2(I_z - I_y) & 0 & -I_{xz}\omega_o^2 \\ -I_{xy}\omega_o^2 & 3\omega_o^2(I_z - I_x) & I_{yz}[\omega_o^2] \\ I_{xz}\omega_o^2 & 0 & (I_y - I_x)\omega_o \end{bmatrix}}_{M_2} \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

در نتیجه اگر تعريف کنیم  $M = [-I^{-1}M_2 \ -I^{-1}M_1]$  می‌توان معادلات نهایی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

### ۳. الگوریتم کنترل پیش‌بین

در این بخش به معرفی بیان ریاضی کنترل پیش‌بین و نحوه به دست آوردن معادلات حاکم بر آن پرداخته می‌شود. نکته‌ی قابل تذکر این که ایده‌ی استفاده از توابع لاغر در طراحی کنترل پیش‌بین اولین بار توسط ونگ<sup>۲</sup> در [۲] و [۱۰-۱۱] معرفی شده است.

#### ۱. فرمول بندی کلی کنترل پیش‌بین

فرض کنید سیستمی دارای  $m$  ورودی و  $q$  خروجی بوده و تعداد حالت‌های آن برابر  $n'$  باشد. هدف آن است که بتوان خطای حالت ماندگار هر یک از خروجی‌های قابل اندازه‌گیری را به صفر رساند.

<sup>1</sup> Orbital frequency  
<sup>2</sup> L. Wang

پاسخ بهینه یک دنباله از ورودی‌های است اما همان‌طور که قبل اشاره شد تنها المان اول از این دنباله به سیستم اعمال می‌گردد. بنابراین:

$$\Delta U = \underbrace{\begin{bmatrix} I_m & 0_m & \cdots & 0_m \end{bmatrix}}_{N_u} (\Phi^T \Phi + R)^{-1} (\Phi^T R_s - \Phi^T Fx(k)) \\ = K_u r(k) - K_{mpc} x(k) \quad (16)$$

**۳.۲. کنترل پیش‌بین همراه با قیود**  
برای اصلاح پاسخ بهینه به دست آمده از کنترل پیش‌بین جهت برخورد با قیود موجود در سیستم باید کنترل پیش‌بین به صورت جدیدی فرموله‌سازی شود. در اینجا فرض بر آن است که قیود موجود در سیستم به فرم نامساوی‌های خطی از متغیرهای سیستم هستند.

قیود روی نرخ تغییرات ورودی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{\min} &\leq \Delta u_1(k) \leq \Delta u_1^{\max} \\ \Delta u_2^{\min} &\leq \Delta u_2(k) \leq \Delta u_2^{\max} \\ &\vdots \\ \Delta u_m^{\min} &\leq \Delta u_m(k) \leq \Delta u_m^{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

به صورت مشابه قیود روی ورودی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1^{\min} &\leq u_1(k) \leq u_1^{\max} \\ u_2^{\min} &\leq u_2(k) \leq u_2^{\max} \\ &\vdots \\ u_m^{\min} &\leq u_m(k) \leq u_m^{\max} \end{aligned} \quad (18)$$

برای تبدیل این قیود به فرم نامساوی‌هایی خطی آنها را به صورت قیودی روی نرخ تغییرات ورودی  $\Delta U$  پارامتری می‌کنیم. برای این کار قیود روی نرخ تغییرات ورودی به صورت ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -\Delta U^{\min} \\ \Delta U^{\max} \end{bmatrix} \quad (19)$$

با اعمال همین روند بر روی قیود روی ورودی برای همهی نمونه‌های آینده خواهیم داشت:

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u(k)^T & \Delta u(k+1)^T & \dots & \Delta u(k+N_u-1)^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(k|k)^T & y(k+2|k)^T & \dots & y(k+N_p|k)^T \end{bmatrix}^T$$

به طوری که  $y(k+i|k)$  نشان دهنده خروجی در لحظه‌ی زمانی  $k+i$  بر اساس حالت در لحظه‌ی زمانی  $k$  یعنی  $x(k)$  است. بر اساس مدل فضای حالت جدید به دست آمده بردار متغیر خروجی به فرم ماتریسی زیر نشان داده می‌شود:

$$Y = Fx(k) + \Phi \Delta U \quad (10)$$

به طوری که:

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2 B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1} B & CA^{N_p-2} B & CA^{N_p-3} B & \dots & CA^{N_p-N_u} B \end{bmatrix} \quad (11)$$

هدف کنترل پیش‌بین آن است که خروجی پیش‌بین شده در لحظه‌ی زمانی  $k+i$  بر اساس مدل را تا حد ممکن به مقدار مرجع از پیش تعیین شده برساند. فرض کنید که بردار خروجی مرجع به صورت زیر باشد:

$$R_s^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{N_p} r(k) \quad (12)$$

وتابع هزینه به صورت زیر است:

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T R \Delta U \quad (13)$$

به طوری که بخش اول این تابع هزینه برای کمینه‌سازی خطابین خروجی پیش‌بینی شده و مقدار مرجع است و بخش دوم برای کمینه‌سازی حداقل تلاش در این مسیر می‌باشد. همچنین  $R$  ماتریس وزن روی ورودی است که یک ماتریس قطری می‌باشد.

برای یافتن ورودی کنترلی بهینه برای کمینه‌سازی  $J$  با قرار دادن معادله‌ی (۱۰) در (۱۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} J &= (R_s - Fx(k))^T (R_s - Fx(k)) \\ &- 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - Fx(k)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + R) \Delta U \end{aligned} \quad (14)$$

با تفاضل گیری از معادله‌ی (۱۴) و برابر صفر قرار دادن آن به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k)) \quad (15)$$

برای حل این مسئله در ابتدا شرایط KKT معرفی می‌شود تا با استفاده از آن بتوان قیود را به فرم ضرایب لاغرانژین<sup>۱</sup> وارد مسئله کرد. این شرایط لازم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} Ex + F + M^T \lambda &= 0, \quad Mx - \gamma \leq 0 \\ \lambda^T (Mx - \gamma) &= 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $\lambda$  بردار ضرایب لاغرانژین خوانده می‌شود. برای یک قید فعال ضریب لاغرانژین متناظر با آن مثبت است و برای یک قید غیرفعال این ضریب صفر است. واضح است که اگر رابطه  $Mx - \gamma = 0$  برقرار باشد آن‌گاه معادله‌ی (۲۳) و (۲۴) یکسان هستند.

برنامه ریزی مربعی هیلدروث یک الگوریتم ساده برای حل مسائل برنامه‌ریزی مربعی است. عبارت تکرار شونده‌ی این روش به صورت

$$\begin{aligned} \text{ذیر است:} \\ \lambda_i^{m+1} = \max(0, \omega_i^{m+1}) \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن:

$$\omega_i^{m+1} = -\frac{1}{h_{ii}} [k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} \lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \lambda_j^{m+1}] \quad (26)$$

به طوری که  $h_{ij}$  یک اسکالر بوده  $\beta$  امین المان از ماتریس  $H = ME^{-1}M^T$  است. همچنین  $k_i$ ،  $\beta$  امین المان از بردار  $K = \gamma + ME^{-1}F$  را بردار همگرا شونده‌ای در نظر بگیریم که شامل مقادیر صفر یا مثبت از ضرایب لاغرانژین است آن‌گاه خواهیم داشت:

$$x = -E^{-1}(M^T \lambda^* + F) \quad (27)$$

بردار همگرا شده  $\lambda$  را  $\lambda_{act}^*$  نامیم که به صورت ذیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{act}^* = -(M_{active} E^{-1} M_{active}^T)^{-1} (\gamma_{active} + M_{active} E^{-1} F) \quad (28)$$

که ماتریس  $M_{active}$  شامل داده‌های قیود بوده و  $\gamma_{active}$  برداری است که از حذف سطرهای صفر در بردار  $\lambda$  به دست می‌آید.

۳.۴. فرمول بندی دوباره‌ی کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لاغر برای فرمول بندی دوباره‌ی کنترل پیش‌بین و ساده‌سازی پاسخ آن از توابع لاغر جهت بیان مسئله اصلی استفاده می‌کنیم. علاوه بر این با استفاده از این توابع می‌توان پارامترهای زیادی که در افق‌های پیش‌بینی طولانی وجود دارد را با تعداد کمتری پارامتر جایگزین نمود.

$$\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ u(k+2|k) \\ \vdots \\ u(k+N_c-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} u(k-1|k) \quad (20)$$

$$+ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & \dots & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \Delta u(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1|k) \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} -(C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U) &\leq -U^{\max} \\ (C_1 u(k-1) + C_2 \Delta U) &\leq U^{\max} \end{aligned} \quad (21)$$

و  $U^{\min}, U^{\max}, \Delta U^{\min}, \Delta U^{\max}$  به ترتیب نشان دهنده‌ی بردارهای سنتونی با  $N$  المان از  $u^{\min}, u^{\max}, \Delta u^{\min}, \Delta u^{\max}$  می‌باشند. اکنون برای ساده‌سازی بیشتر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}; N_1 = \begin{bmatrix} -U^{\min} + C_1 u(k-1) \\ U^{\max} - C_1 u(k-1) \end{bmatrix}; \\ M_2 &= \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} -\Delta U^{\min} \\ \Delta U^{\max} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow MU &\leq \gamma \end{aligned} \quad (22)$$

### ۳. حل عددی برای کنترل پیش‌بین

برای معرفی یک پاسخ عددی در ابتدا به معرفی برنامه‌ریزی مربعی پرداخته می‌شود. فرض کنید  $X$  متغیر تصمیم‌گیری بوده و ماتریس  $E$  یک ماتریس متقاضن و مثبت معین است.تابع هزینه و قیود به فرم زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} J &= x^T Ex + x^T F \\ Mx &\leq \gamma \end{aligned} \quad (23)$$

در این مسئله قیود به فرم نامساوی هستند. این نوع قیود می‌تواند به دو دسته تقسیم شود. اگر یکی از آن‌ها به تساوی تبدیل گردد آن را فعال می‌نامیم. در غیر این صورت قید غیر فعال است. دقت کنید که برای داشتن یک پاسخ بهینه در این مسئله، تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری باید بیشتر یا برابر با تعداد قیود فعال باشد.

<sup>۱</sup> Lagrangian multipliers

به طوری که در آن  $\eta_i = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T$  بردار پارامتر بوده  
 $L(k)^T = [l_1^i(k) \ l_2^i(k) \ \dots \ l_{N_i}^i(k)]$  ترانهاده‌ی شبکه‌ی توابع  
 لاگر است. اکنون می‌توان دنباله‌ی ورودی کنترلی سیستم را به صورت  
 زیر معرفی کنیم:

$$\Delta u(k+m) = \begin{bmatrix} L_1(m)^T & o_2^T & \dots & o_m^T \\ o_1^T & L_2(m)^T & \dots & o_m^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_1^T & o_2^T & \dots & L_m(m)^T \end{bmatrix} \eta \quad (37)$$

که در آن  $m$  نشان دهنده‌ی لحظه‌ی زمانی آینده بوده و  $O_k$  بردار  
 صفر است. اکنون واضح است که با استفاده از توابع لاگر قید به فرم  
 $M\eta \leq \gamma$  در می‌آیند.

پیش‌بینی حالت‌های آینده در لحظه‌ی  $m$  می‌تواند به صورت زیر  
 نوشته شود:

$$x(k+m | k) = A^m x(k) + \phi(m)^T \eta \quad (38)$$

به طوری که:

$$\phi(m)^T = \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1} [B_1 L_1(j)^T \ B_2 L_2(j)^T \ \dots \ B_m L_m(j)^T] \eta \quad (39)$$

که در آن  $\eta^T = [\eta_1^T \ \eta_2^T \ \dots \ \eta_m^T]$  بردار پارامتر است.

با توصیف تابع هزینه با استفاده از توابع لاگر می‌توان آن را به  
 صورت زیر نوشت:

$$J = \eta^T \Omega \eta + 2\eta^T \Psi x(k) + \sum_{m=1}^{N_p} x(k)^T (A^T)^m Q A^m x(k) \quad (40)$$

که در آن ماتریس‌های  $\Omega$  و  $\Psi$  به صورت زیر به دست  
 می‌آیند:

$$\Omega = \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q \phi(m)^T + R_L \quad (41)$$

$$\Psi = \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q A^m$$

و ماتریس‌های  $R_L$  و  $Q$  ماتریس‌های وزنی هستند. برای تبدیل  
 حالت‌ها به خروجی در توصیف تابع هزینه کافیست قرار دهیم  
 $.Q = C^T C$

تتابع لاگر یک مجموعه از توابع گسسته با پایه‌ی متعامد هستند که  
 تبدیل  $z$  آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma_N(z) = \Gamma_{N+1}(z) \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (29)$$

به طوری که:

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1 - az^{-1}} \quad (30)$$

در این تبدیل  $a$  قطب شبکه است و برای اینکه این شبکه پایدار  
 باشد باید  $0 \leq a < 1$ .  
 اگر معکوس تبدیل  $z$  تابع  $\Gamma_N(z, a)$  را با  $I_N(k)$  نشان دهیم،  
 قرار می‌دهیم:

$$L(k) = [I_1(k) \ I_2(k) \ \dots \ I_N(k)]^T \quad (31)$$

این مجموعه معادله‌ی دیفرانسیل زیر را برآورده می‌کند:

$$L(k+1) = A_l L(k) \quad (32)$$

که در آن شرایط اولیه به صورت زیر داده شده است:  
 $L(0)^T = \sqrt{\beta} [1 - a^2 \ a^2 - a^3 \ \dots \ (-1)^{N-1} a^{N-1}] \quad (33)$

و ماتریس  $A_l$  یک ماتریس  $N \times N$  است. به طور مثال برای  $N=5$   
 این ماتریس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_l = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha^2\beta & -\alpha\beta & \beta & \alpha & 0 \\ -\alpha^3\beta & \alpha^2\beta & -\alpha\beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (34)$$

می‌توان پاسخ ضربه‌ی یک سیستم پایدار را با استفاده از تتابع لاگر  
 توضیح داد. در یک سیستم چند ورودی-چند خروجی که سیگنال  
 ورودی می‌تواند به صورت  $[\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \dots \ \Delta u_m]^T$  بیان شود،  
 هر ورودی به صورت مستقل یک مکان برای قطب لاگر دارد.

می‌توان ماتریس ورودی  $B$  را به صورت زیر نوشت:  
 $B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m] \quad (35)$

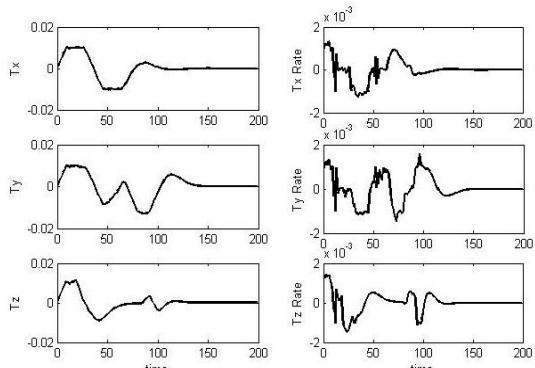
اکنون می‌توان هر سیگنال کنترل ورودی را به صورت پاسخ ضربه‌ی  
 یک سیستم پایدار نوشت آن‌گاه آن را می‌توان به صورت زیر توضیح داد:  
 $\Delta u_i(k) = L_i(k)^T \eta_i \quad (36)$

## کنترل ماهواره با رویکرد کنترل پیش‌بین و با استفاده از توابع لآخر

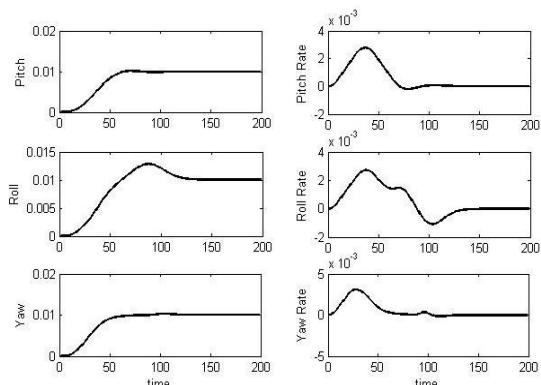
مسئله‌ی کنترل پیش‌بین معمولی به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} \quad & J = \sum_{i=1}^{N_p} \|r - y(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=1}^{N_u-1} \|u(k+i|k)\|_R^2 \\ \text{subject to} \quad & x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 1, \dots, N_p \\ & u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max} \quad k = 1, \dots, N_u \\ & \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max} \quad k = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (46)$$

برای حل این مسئله از SeDuMi Yalmip و حل کننده‌ی استفاده خواهد شد. این جعبه ابزار و حل کننده برای حل مسائل بهینه سازی محدب به کار می‌روند. همان‌طور که از تابع هزینه و قیود موجود در مسئله‌ی (46) مشخص است، این مسئله نیز محدب می‌باشد. در این مسئله هدف آن است که ماهواره طوری کنترل شود که هر موقعیت زاویه‌ی آن به مقدار  $0/01$  برسد و نرخ تغییرات این زوایا صفر شود. با اعمال کنترل کننده‌ی طراحی شده خواهیم داشت:



شکل ۱- سیگنال ورودی (گشتاورها) و نرخ تغییرات آن برای مرجع پله با مقدار  $0/01$



شکل ۲- سیگنال خروجی (زوایای موقعیت و نرخ تغییرات آن‌ها) برای مرجع پله با مقدار  $0/01$

## ۴. نتایج شبیه‌سازی

برای شبیه‌سازی از پارامترهای مدل که در جدول ۱ آمده است استفاده می‌شود. این پارامترها از مرجع [۱۲] گرفته شده‌اند.

جدول ۱ : پارامترهای ماهواره

$I_x$	۱۰/۴۱
$I_y$	۱۰/۷۹
$I_z$	۶/۵۱
$I_{xy}$	۰/۶۵
$I_{xz}$	۰/۰۰
$I_{yz}$	۰/۰۰
$\omega_0$	۰/۰۰۱۱

برای اعمال کنترل پیش‌بین که از توابع لآخر استفاده می‌کند از پارامترهای آمده در [۱۳] استفاده خواهد شد.

الگوریتم کنترل پیش‌بین به سیستم گستته اعمال خواهد شد بنابراین ابتدا با استفاده از زمان نمونه برداری  $Ts=0.1s$  معادلات دینامیکی معرفی شده برای ماهواره گستته اعمال خواهد شد. معادلات در مسیر نامی ماهواره اولیه می‌گرددند، مقداردهی

$$[\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

دامنه‌ی ورودی کنترلی با قید موجود در سیستم پیش‌رانش به صورت زیر محدود می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_{\min} &= [-0.01 \ -0.01 \ -0.01](Nm) \\ u_{\max} &= [0.01 \ 0.01 \ 0.01](Nm) \\ \Delta u_{\min} &= [-0.001 \ -0.001 \ -0.001](Nm/s) \\ \Delta u_{\max} &= [0.001 \ 0.001 \ 0.001](Nm/s) \end{aligned} \quad (42)$$

برای کنترل پیش‌بین با استفاده از توابع لآخر پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$N_p = 20; N = [10, 10, 10]; N_u = 10 \quad (43)$$

که در آن  $N_p$  افق پیش‌بینی بوده و  $N$  تعداد توابع لآخر است.  $N_u$  نیز نشان دهنده افق کنترل در کنترل پیش‌بین است.

قطبهای شبکه‌ی لآخر به صورت زیر انتخاب می‌شوند:  
 $a = [0.8, 0.8, 0.8]$  (44)

و ماتریس وزن برای سیگنال ورودی به صورت زیر است:

$$R = [0.1, 0.1, 0.1]^T \quad (45)$$

توابع لagger استفاده می‌کند کمتر از  $1/465$  ثانیه بود. بنابراین در این مقاله به هدف کاهش زمان محاسبات کنترلکننده نیز رسیده‌ایم.

### ۵. نتیجه گیری

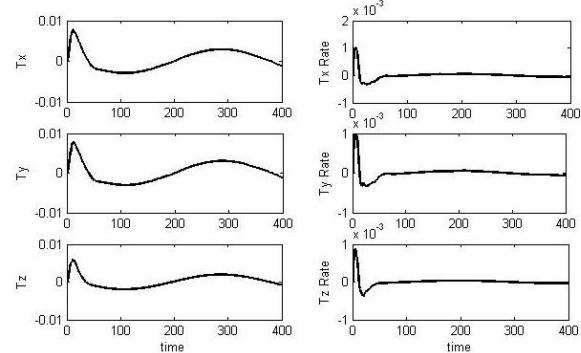
در این مقاله به مسئله‌ی ساده سازی الگوریتم کنترل پیش‌بین پرداخته شده است. برای این ساده سازی از توابع لagger استفاده شد که نشان داده شد با استفاده از این توابع بار محاسباتی کنترل پیش‌بین که یکی از موانع پیاده سازی عملی این کنترلکننده است حل می‌شود. همچنین نتایج شبیه سازی آورده شد و نشان داده شد که با اعمال این کنترلکننده روشی یک ماهواره این کنترلکننده به طور موفقیت آمیزی علاوه بر آوردن قیود موجود در مسئله توانسته است به مقدار مطلوب برای خروجی‌ها هم دست یابد. در نهایت مقایسه‌ای بین زمان‌های کنترل پیش‌بین معمولی و با استفاده از توابع لagger انجام گرفت و نشان داده شد که زمان کنترل پیش‌بین معمولی بسیار بیشتر از کنترل پیش‌بینی است که از توابع لagger استفاده می‌کند.

### مراجع

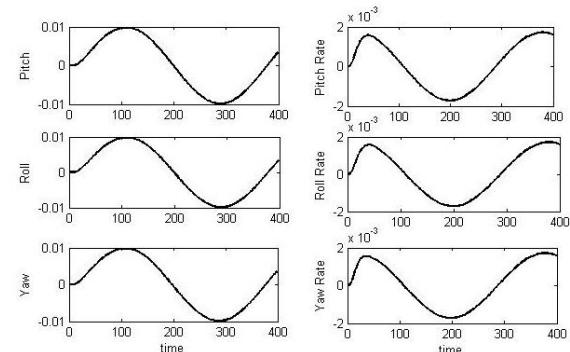
- [1]. S. J. Qin and T. A. Badgwell, "A survey of industrial model predictive control technology," *Control Engineering Practice*, vol. 11, pp. 733-764, 2003.
- [2]. L. Wang, "Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB," ed: Springer, 2009.
- [3]. J. M. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*: Prentice Hall, 2000.
- [4]. M. Haeri and H. Z. Beik, "Extension of Nonlinear DMC for MIMO Systems," presented at the International Conference on Control and Automation (ICCA'03) Montreal, Canada, 2003.
- [5]. R. Scattolini, "Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control – A review," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 723-731, 2009.
- [6]. X. Chen and X. Wu, "Design and Implementation of Model Predictive Control Algorithms for Small Satellite Three-Axis Stabilization," presented at the International Conference on Information and Automation, Shenzhen, China, 2011.
- [7]. A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos, "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 3-20, 2002.
- [8]. P. Tøndel, T. A. Johansen, and A. Bemporad, "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions," presented at the IEEE Conference on Decision and Control, 2001.
- [9]. Y. Wang and S. Boyd, "Fast Model Predictive Control Using Online Optimization," *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, vol. 18, pp. 267 - 278, 2010.
- [10]. L. Wang, "Discrete time model predictive control design using Laguerre functions," presented at the American Control Conference, 2001.
- [11]. L. Wang, "Discrete model predictive controller design using Laguerre functions," *Journal of Process Control*, vol. 14, pp. 131-142, 2004.
- [12]. M. J.Sidi, *Spacecraft dynamics and control*: Cambridge, 1997.

همان‌طور که مشخص است مقدار بهینه برای هر یک از خروجی‌ها به دست آمده است و قیود روی سیگنال ورودی و نرخ تغییرات آنها جز در چند نقطه محدود برآورده شده است.

برای یک مرجع سینوسی با دامنه  $0/01$  برای هر زاویه‌ی خروجی نتایج به صورت زیر است:



شکل ۳ - سیگنال ورودی (گشتاورها) و نرخ تغییرات آن برای مرجع سینوسی



شکل ۴ - سیگنال خروجی (زواياي موقعیت و نرخ تغییرات آنها) برای مرجع سینوسی

همان‌طور که از نتایج برمی‌آید برای مرجع سینوسی نیز مقدار بهینه به دست آمده است. و قیود موجود روی سیگنال کنترل و نرخ تغییرات آن برآورده شده است. در نتیجه توانسته‌ایم ماهواره را با اعمال کنترل پیش‌بین طراحی شده به خوبی کنترل کنیم.

همه‌ی شبیه سازی‌های انجام شده با استفاده از نرم افزار Matlab و با استفاده از یک لپ تاپ با هسته‌ی دو گانه و پردازنده‌ی با فرکانس GHz ۲/۵۳ و حافظه‌ی RAM به اندازه‌ی ۴ GB به دست آمده است.

پس از اندازه گیری زمان‌های استفاده شده توسط پردازنده برای هر یک از دو کنترل کننده پیش‌بین معمولی و با استفاده از توابع لagger، زمان محاسبات کنترل پیش‌بین معمولی بیش از  $653/1665$  ثانیه به طول انجامید این در حالی است که زمان محاسبات برای کنترل پیش‌بین که از

presented at the IEEE International Conference on Computer Science and Information Technology (ICCSIT), 2010.

[13]. L. Ji, J. Xiang, and K. Liu, "Model Predictive Techniques Based Three-axis Stabilization Control of a Drag-free Satellite,"

